UNIVERSIDAD DE SANTANDER

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS
DEPARTAMENTO DE ANALISIS DE LAS ESTRUCTURAS
CATEDRA DE CALCULO DE ESTRUCTURAS

PROBLEMAS DE ELEMENTOS FINITOS

CURSO MONOGRAFICO

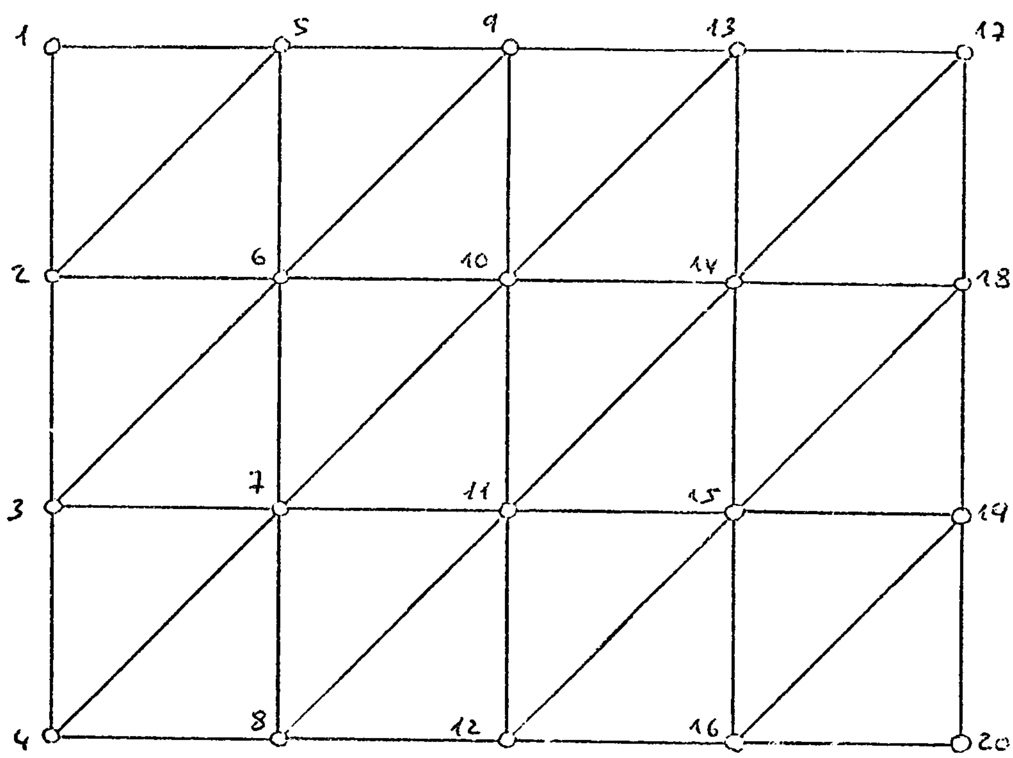
26 - 30 de Mayo de 1980

Avelino Samartín Quiroga
Julián Díaz del Valle
Luis Moreno García

Indice

Ejercicio 1.1

(1) Dividir un cuadrilátero en 24 triángulos de manera que haya 5 nodos en dos lados opuestos y 4 en los otros dos.
Hallar el ancho de banda mínimo.
Dos grados de libertad por nodo.



Máxima diferencia de numeración entre 2 nodos consecutivos ; 4

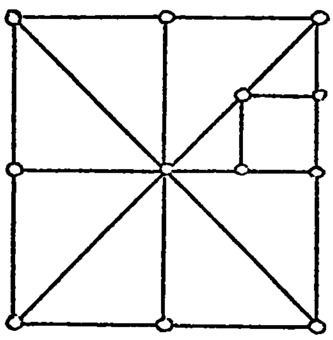
El ancho de banda será :

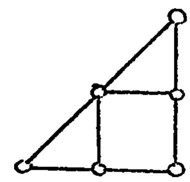
$$(4+1)\,2 = 10$$

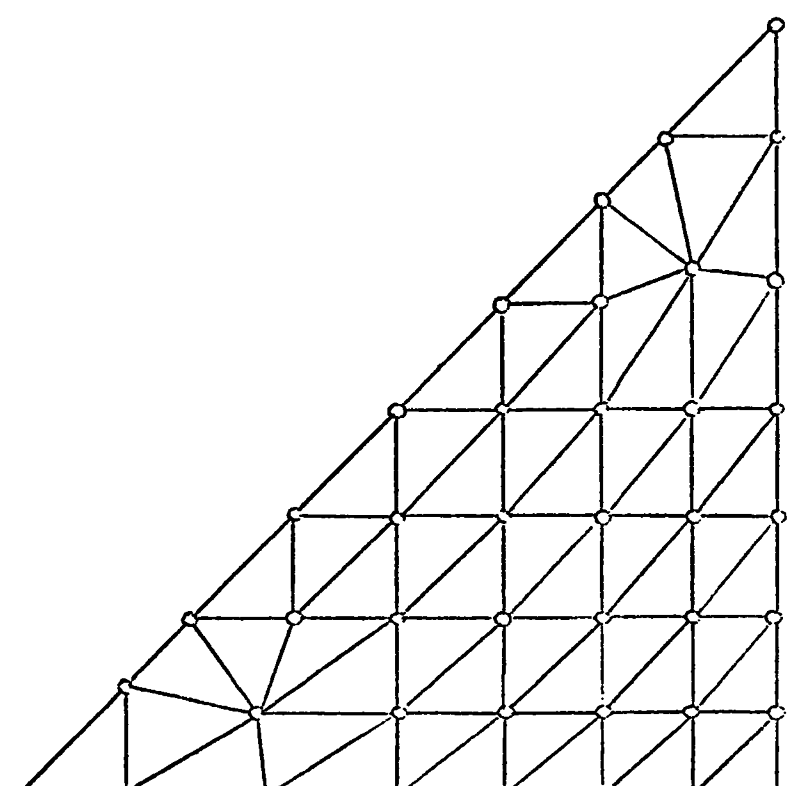
$\boxed{\text{Ancho de banda} = 10}$

Ejercicio 1.2

② Se quiere estudiar una viga de sección cuadrada de lado 1 unidad. Para ello con las condiciones de simetría se divide la menor área de dicha sección de forma que existan aproximadamente 60 elementos triangulares. Los más pequeños donde haya más tensiones. Es conveniente hacer la división:

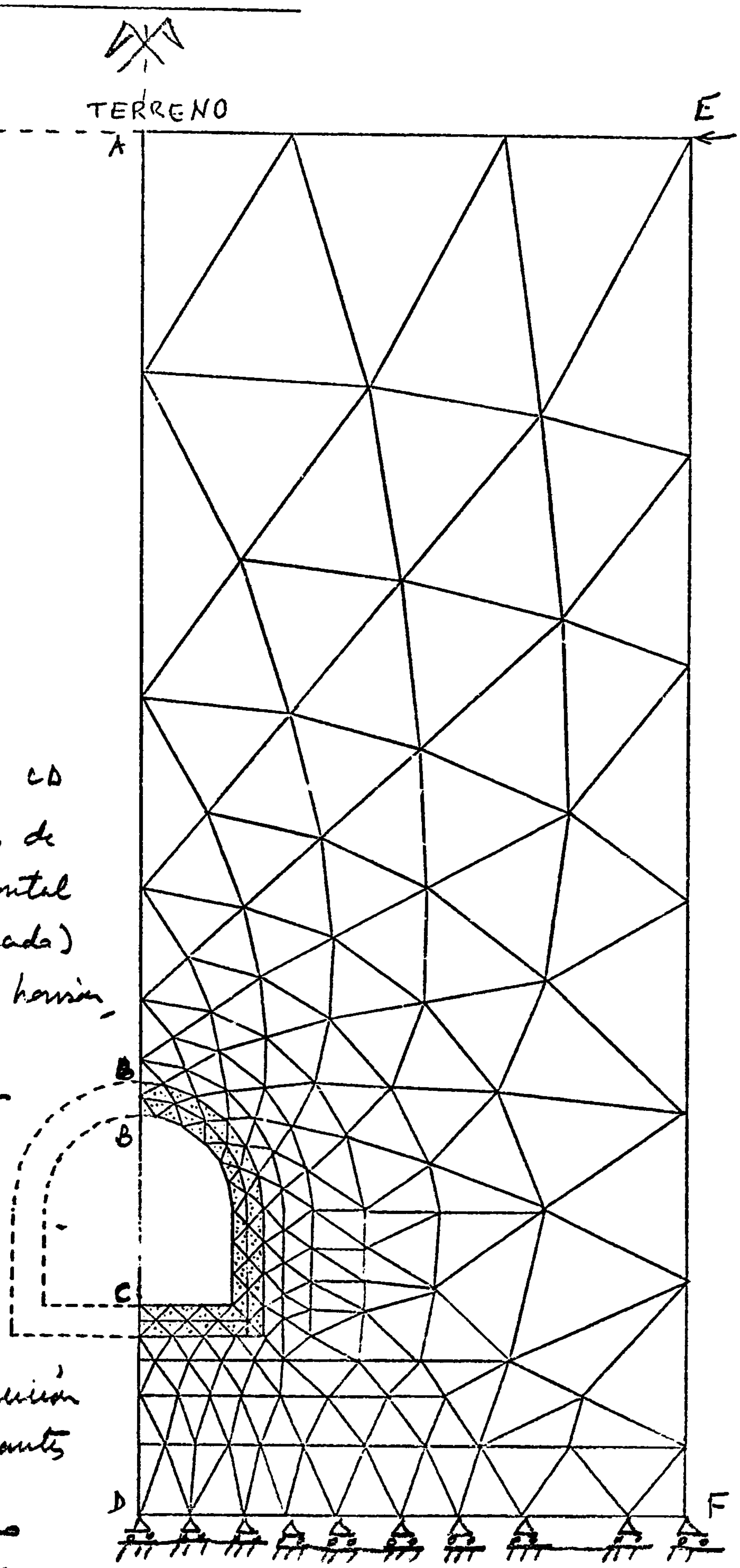






Ejercicio - 1.5

3) Se desea calcular un túnel de la sección indicada en la figura. Diseñar una malla adecuada de elementos finitos triangulares. Se supone que existe un terreno horizontal de un espesor de 30 m por encima del punto A. Utilizar un máximo de 150 nodos.



Nº de nodos utilizado:

$\boxed{146}$

A lo largo del borde AB y CD se incluirán las condiciones de simetría (desplazamiento horizontal nulo y vertical no coaccionado)

Borde DF apoyo deslizante horizontalmente.

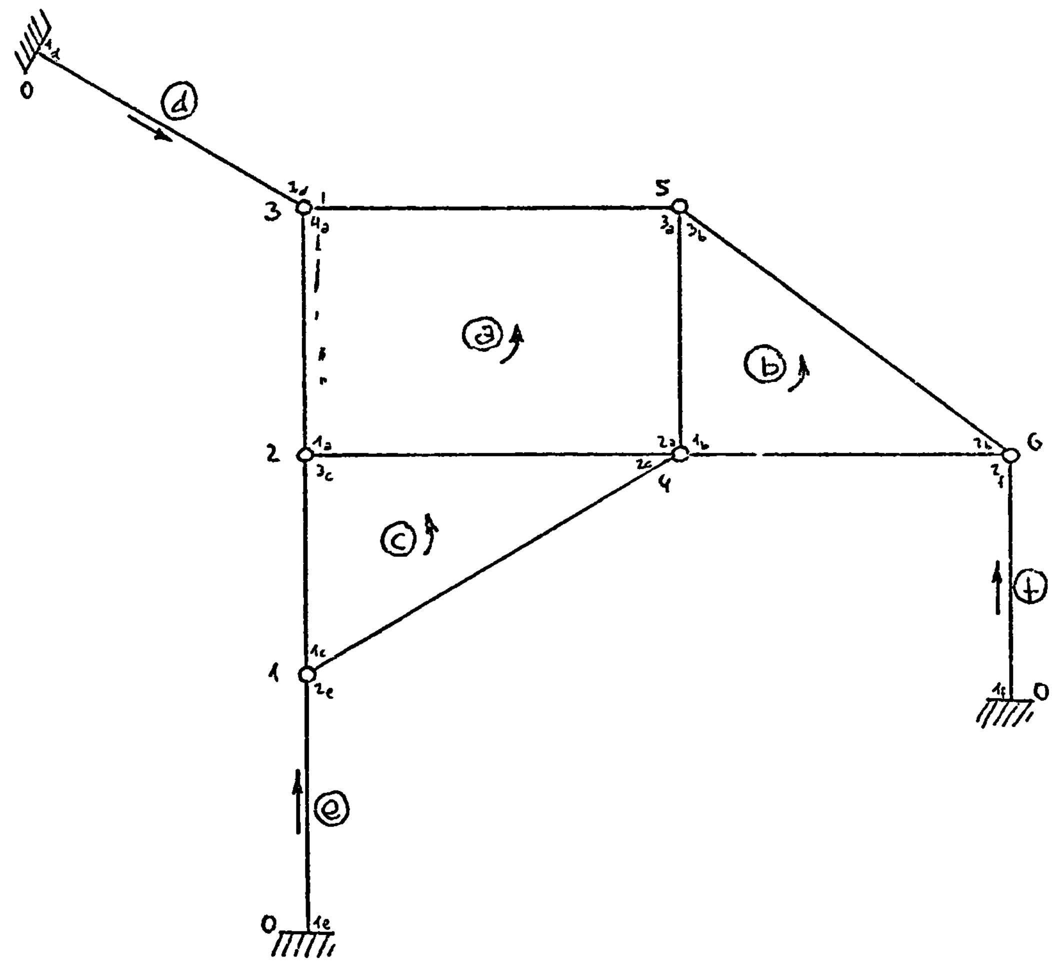
Borde EF conviene incluir las tensiones distribuidas (hidrostáticamente) en el terreno sin la modificación del túnel. Si la distancia EA es muy grande se pueden sustituir esta distribución de tensiones por apoyos deslizantes verticalmente.

Es importante en el cálculo de estas estructuras incluir las fases de construcción.

Escala:

Ejercicio 1.4

(4) Formar la matriz de rigidez, indicando con una x los elementos distintos de cero, suponiendo un grado de libertad por nodo.



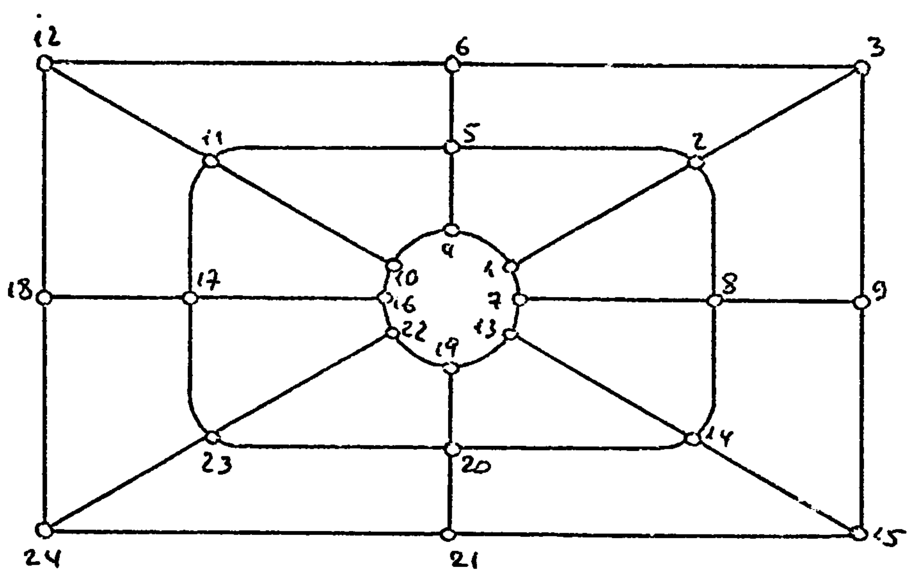
$$K = \begin{pmatrix} (K_{22})_e + (K_{11})_c & (K_{13})_c & 0 & (K_{12})_c & 0 & 0 \\ (K_{31})_c & (K_{33})_c + (K_{11})_a & (K_{14})_a & (K_{32})_c + (K_{12})_a & (K_{13})_a & 0 \\ 0 & (K_{41})_a & (K_{22})_d + (K_{44})_a & (K_{42})_a & (K_{43})_a & 0 \\ (K_{21})_c & (K_{23})_c + (K_{21})_a & (K_{24})_a & (K_{22})_c + (K_{11})_b + (K_{22})_a & (K_{13})_b + (K_{23})_a & (K_{12})_b \\ 0 & (K_{31})_a & (K_{34})_a & (K_{31})_b + (K_{32})_a & (K_{33})_b + (K_{33})_a & (K_{32})_b \\ 0 & 0 & 0 & (K_{21})_b & (K_{23})_b & (K_{22})_f + (K_{22})_b \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.5

5) Numerar, de forma que el ancho de banda sea mínimo. Si N es el número de grados de libertad por nudo, hallar el ancho de banda en los casos

a) que sea una estructura de barras

b) que sea una estructura de elementos finitos cuadriláteros



a) Estructura de barras

Ancho de banda:

$$(6+1)\,N = \boxed{7\,N}$$

b) Estructura de elementos finitos cuadriláteros:

$$(7+1)\,N = \boxed{8\,N}$$

Ejercicio 2.1

Resolver la ecuación diferencial monodimensional

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0 \qquad \text{con} \qquad 0 < x < 1.$$

con las condiciones de contorno

$$u(0) = u(1) = 0$$

mediante los siguientes procedimientos:

a) Rayleigh - Ritz

b) Galerkin

c) Colocacion

d) Subdominios o regiones

e) Funciones pesantes polinomicas (ó de los momentos)

f) Error cuadratico mínimo

Comparar los resultados obtenidos.

Se utilizaran funciones polinomicas como funciones coordenadas generalizadas.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La solución exacta de esta ecuación es: $\boxed{u(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 1} - x}$

1.- METODO DE RAYLEIGH-RITZ

La solución de la ecuación diferencial hace estacionaria la expresión:

$$I(u) = \langle Lu, u \rangle - 2\langle f, u \rangle$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

Con $\quad Lu = \dfrac{d^2u}{dx^2} + u$

$\qquad f = -x$

Es decir:

$$I(u) = \int_0^1 \left(\frac{d^2u}{dx^2} + u\right) u\, dx + 2\int_0^1 u\, x\, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2} \cdot u\, dx + \int_0^1 (u^2 + 2ux)\, dx$$

Considerando el primer término e integrando por partes se tiene:

$$w = u \quad \rightarrow \quad dw = \frac{du}{dx}\, dx$$
$$dv = \frac{d^2u}{dx^2} \quad \rightarrow \quad v = \frac{du}{dx}$$

$$\int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2} \cdot u\, dx = u\frac{du}{dx}\Big]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

y dado que $u(0) = u(1) = 0$, se tiene $u\dfrac{du}{dx}\Big]_0^1 = 0$, resultando la funcional:

$$I(u) = \int_0^1 \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - u^2 - 2ux\right] dx$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

Se considerará una solución aproximada $u_N(x)$ tal que:

$$u_N(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_N\varphi_N(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i(x)$$

debiendo formar las $\varphi_i(x)$ un conjunto completo de funciones linealmente independientes, su continuas y que cumplan todas ellas las condiciones de contorno

Se tomará:

$$\varphi_1 = x(x-1) \quad ; \quad \varphi_2 = x^2(1-x) \quad ; \quad \varphi_3 = x^3(1-x) \; ; \; \ldots$$

Los a_i son coeficientes a determinar, imponiendo la condición:

$$\frac{\partial I(u)}{\partial a_i} = 0 \quad ; \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, N$$

A continuación se resuelve el problema para los casos $N=1$ y $N=2$

1.1. $\underline{N=1}$

En este caso $\quad u_1 = a_1 x(1-x)$

$$\frac{du_1}{dx} = a_1(1-2x)$$

$$I_1 = I(u_1) = \int_0^1 [a_1^2(1-2x)^2 - a_1^2 x^2(1-x)^2 - 2a_1 x^2(1-x)]\,dx$$

$$I_1 = \frac{3}{10}a_1^2 - \frac{1}{6}a_1$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial a_1} = \frac{3}{5}a_1 - \frac{1}{6} = 0 \implies a_1 = \frac{5}{18}$$, con lo que

$$\boxed{u_1 = \frac{5}{18}x(1-x)}$$

1.2 $\underline{N=2}$

$$u_2 = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)$$

$$\frac{du_2}{dx} = a_1(1-2x) + a_2(2x-3x^2)$$

$$I_2 = I(u_2) = \int_0^1 \{[a_1(1-2x) + a_2(2x-3x^2)]^2 - [a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)]^2 - 2x[a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)]\}\,dx$$

Operando e imponiendo las condiciones: $\dfrac{\partial I_2}{\partial a_1} = 0$; $\dfrac{\partial I_2}{\partial a_2} = 0$, se obtiene:

$a_1 = \frac{71}{369}$; $a_2 = \frac{7}{41}$, es decir

$$\boxed{u_2 = \frac{71}{369} \cdot x(1-x) + \frac{7}{41} x^2(1-x)}$$

pudiéndose confeccionar la siguiente tabla comparativa de valores:

X	$u_{exactas}$	u_1	u_2	$u'_{ex.}$	u'_1	u'_2
1/4	0.044	0.052	0.044	0.152	0.139	0.150
1/2	0.070	0.069	0.069	0.043	0.000	0.043
3/4	0.060	0.052	0.060	-0.131	-0.139	-0.128

en la que se observa que se obtiene una buena aproximación en desplazamientos, debiéndose sin embargo tener presente que en fuerzas y esfuerzos (derivadas segundas y terceras de u), los errores serían mayores.

2. METODO DE GALERKIN

Se considera como solución de la ecuación diferencial la función

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(x)$$

en los que las $\phi_i(x)$ han de cumplir:

- Ser continuas del clase uno, C^1.
- Satisfacen todas las condiciones de contorno
- Forman un sistema completo

Si la ecuación a resolver es:

$$\underset{+\,c.\,c.}{L u = f} \quad ,$$

el error que se comete al tomar u_N como solución es:

$$\varepsilon_N = L u_N - f = L \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(x) - f \quad ,$$ debiéndose verificar.

$$\left\langle L \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(x) - f, \phi_n \right\rangle = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, N$$

Aplicación al presente problema para $N = 1$ y $N = 2$

2.1 N=1

Se toma $u_1 = a_1 x(1-x)$

$$\varepsilon_1 = \frac{d^2u_1}{dx^2} + u_1 + x = -2a_1 + a_1 x(1-x) + x$$

$$\langle \varepsilon_1, \phi_1 \rangle = \int_0^1 [-2a_1 + a_1 x(1-x) + x]\, x(1-x)\, dx = 0$$

Operando se obtiene $a_1 = \frac{5}{18}$, con lo cual

$$\boxed{u_1 = \frac{5}{18} x(1-x)}$$

2.2. N=2

Se considera $u_2 = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)$

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2u_2}{dx^2} + u_2 + x = -2a_1 + 2a_2(1-3x) + a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x) + x$$

Las condiciones para obtener a_1 y a_2 son:

$$\langle \varepsilon_2, \phi_1 \rangle = \int_0^1 \varepsilon_2\, x(1-x)\, dx = 0$$

$$\langle \varepsilon_2, \phi_2 \rangle = \int_0^1 \varepsilon_2\, x^2(1-x)\, dx = 0$$

Resolviendo resulta $a_1 = \frac{71}{369}$; $a_2 = \frac{7}{41}$

Nótese que el método de Galerkin coincide con el de Rayleigh-Ritz cuando se trata de un problema lineal y autoadjunto, como en este caso.

3. METODO DE LA COLOCACION

Este método es similar al de Galerkin, pero en este caso obligamos a que el error sea nulo en tantos puntos como incógnitas se tengan, es decir:

$$\langle \varepsilon_N , \delta(\bar{x}_i) \rangle = 0 \quad ; \text{ para } \quad i = 1, 2, \dots N$$

3.1 N=1

$$u_1 = a_1 x(1-x)$$

$$\varepsilon_1 = -2a_1 + a_1 x(1-x) + x$$

En $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \varepsilon_1(1/2) = -2a_1 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{2} = 0 \longrightarrow a_1 = \frac{2}{7}$, luego

$$\boxed{u_1 = \frac{2}{7}x(1-x)}$$

3.2 N=2

$$u_2 = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)$$

$$\varepsilon_2 = -2a_1 + 2a_2(1-3x) + a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x) + x$$

Considerando los puntos $x = \frac{1}{3}$ y $x = \frac{2}{3}$, y haciendo

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_2(1/3) = 0 \\ \varepsilon_2(2/3) = 0 \end{array}\right\} \text{ se obtiene } \left\{\begin{array}{l} a_1 = \frac{81}{416} \\ a_2 = \frac{72}{416} \end{array}\right.$$

$$\boxed{u_2 = \frac{81}{416}x(1-x) + \frac{72}{416}x^2(1-x)}$$

resultando la siguiente tabla comparativa:

X	u_{exacta}	u_1	u_2
1/4	0.04401	0.05357	0.04462
1/2	0.06975	0.07143	0.07031
3/4	0.06006	0.05357	0.06085

4. METODO DE LOS SUBDOMINIOS

El método consiste en dividir el dominio de existencia de la ecuación en tantos subdominios como incógnitas se tengan y hacer que el error en cada uno de estos subdominios se anule en la media.

Cada uno de estos subdominios C_i se puede representar por una función $h_{c_i}(x)$ tal que:

$$h_{c_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C_i \\ 0 & \text{si } x \notin C_i \end{cases}$$

obteniéndose las incógnitas imponiendo las condiciones:

$$< \varepsilon_N, h_{c_i}(x) > = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

La condición que se ha de cumplir es que los subdominios "formen base", es decir, que las funciones $h_{c_i}(x)$ sean linealmente independientes.

A continuación se aplica el método para $N=1$ y $N=2$

4.1. $\underline{N=1}$

Se considera un sólo subdominio $C_1 \equiv (0,1)$

$u_1 = a_1 x(1-x)$

$\varepsilon = -2a_1 + a_1 x(1-x) + x$

Condición:

$$\int_0^1 [-2a_1 + a_1 x(1-x) + x]\,dx = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{11}$$

$$\boxed{u_1 = \frac{3}{11} x(1-x)}$$

4.2 $\underline{N=2}$

$u_2 = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)$

Se consideran 2 subdominios $C_1 \equiv (0, 1/2)$, $C_2 \equiv (1/2, 1)$

$\varepsilon_2 = -2a_1 + 2a_2(1-3x) + a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x) + x$

Condiciones

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{1/2} \varepsilon_2\,dx &= 0 \\ \int_{1/2}^1 \varepsilon_2\,dx &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{97}{517} \\ a_2 = \dfrac{88}{517} \end{cases}$$

$$\boxed{u_2 = \frac{97}{517} x(1-x) + \frac{88}{517} x^2(1-x)}$$

Resultando:

x	u_{exacta}	u_1	u_2
1/4	0.04401	0.05114	0.04316
1/2	0.06975	0.06818	0.06818
3/4	0.06080	0.05114	0.05912

5. METODOS DE LAS FUNCIONES PESANTES

Consiste en hacer cumplir la condición

$$\langle \varepsilon_N, g_i(x) \rangle = 0 \; ; \text{ para } i = 1, 2, \ldots, N,$$

donde las $g_i(x)$ son funciones linealmente independientes. La aplicación al presente problema se realiza para $N=1$ y $N=2$, y tomando como serie de funciones pesantes la

$$1, \; x, \; x^2, \; x^3,$$

5.1.- $N=1$

$$u_1 = a_1\, x(1-x)$$

$$\varepsilon_1 = -2a_1 + a_1 x(1-x) + x$$

$$g_1(x) = 1$$

Condición:

$$\int_0^1 [-2a_1 + a_1 x(1-x) + x] \cdot 1 \, dx = 0 \longrightarrow a_1 = \frac{3}{11}$$

$$\boxed{u_1 = \frac{3}{11}\, x(1-x)}$$

5.2.- $N=2$

$$u_2 = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)$$

$$\varepsilon_2 = -2a_1 + 2a_2(1-3x) + a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x) + x$$

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x$$

Condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^1 \varepsilon_2 \cdot 1 \, dx = 0 \\ \int_0^1 \varepsilon_2 \cdot x \, dx = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{122}{649} \\ a_2 = \dfrac{110}{649} \end{array}\right.$$

6. MÉTODO DEL ERROR CUADRÁTICO MÍNIMO

Consiste en hacer mínimo el error cuadrático:

$$I_N \quad \mathcal{E}_N^2 = \langle \mathcal{E}_N , \mathcal{E}_N \rangle .$$

Si se considera como solución

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i \quad , \text{ el error es}$$

$$\mathcal{E}_N = L \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i - f$$

$$I_N = \langle L \sum a_i \phi_i - f , L \sum a_i \phi_i - f \rangle$$

Las condiciones para que I_N sea mínimo son:

$$\frac{\partial I_N}{\partial a_i} = 0 \;; \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, N \;, \text{ o sea:}$$

$$2 \langle L \sum a_i \phi_i - f , L \phi_n \rangle = 0 \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots, N$$

es decir

$$\boxed{\langle \mathcal{E}_N , L \phi_n \rangle = 0} \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots, N$$

Se ve que este método es un caso particular del de las funciones pesantes cuando éstas son $L\phi_n$.

Con este método se obtienen mejores resultados, no sólo en flechas sino también en sus derivadas.

6.1 $N = 1$

$$u_1 = a_1 \, x(1-x)$$
$$\phi_1 = x(1-x)$$
$$L\phi_1 = -2 + x(1-x)$$

Condición:

$$\int_0^1 \mathcal{E}_1 \left[x(1-x) - 2 \right] dx = 0 \longrightarrow a_1 = \frac{385}{1414}$$

6.2 $N = 2$

$$u_2 = a_1\, x(1-x) + a_2\, x^2(1-x)$$

$$\phi_1 = x(1-x) \quad ; \quad L\phi_1 = -2 + x - x^2$$

$$\phi_2 = x^2(1-x) \quad ; \quad L\phi_2 = 2 - 6x + x^2 - x^3$$

Condiciones:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \varepsilon_2 \left[-2 + x - x^2\right] dx = 0 \\ &\int_0^1 \varepsilon_2 \left[2 - 6x + x^2 - x^3\right] dx = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} a_1 &= \frac{46161}{101 \times 2437} \\ a_2 &= \frac{413}{2437} \end{aligned}\right.$$

Resultando:

x	u_{exacta}	u_1	u_2	$u'_{exac.}$	u'_1	u'_2
1/4	0.044401	0.051052	0.043108	0.151450	0.136139	0.146731
1/2	0.06975	0.068069	0.068069	0.042915	0.000000	0.0423676
3/4	0.06006	0.051052	0.058996	-0.130464	-0.136139	-0.125547

Ejercicio 2.2

Resolver la ecuación diferencial bidimensional, correspondiente a un problema de torsión (ecuación de Poisson):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 \qquad \text{para} \quad \begin{array}{l} -1 < x < 1 \\ -1 < y < 1 \end{array}$$

con las condiciones de contorno siguientes

$u(x,y) = 0$ a lo largo del contorno $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$.

Se utilizarán los siguientes procedimientos:

a) Rayleigh - Ritz

b) Galerkin

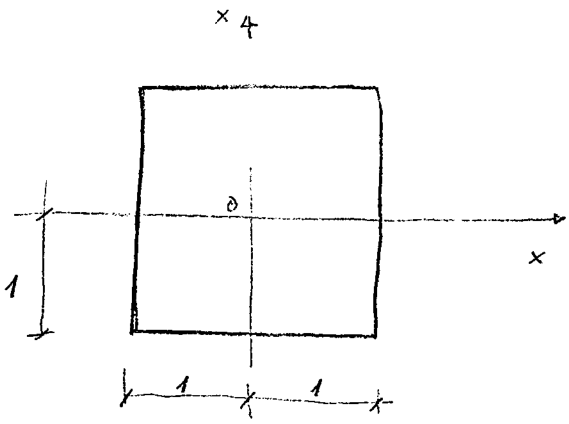
c) Colocación

d) Subdominios

e) Funciones pesantes.

f) Error cuadrático mínimo.

Se utilizarán funciones polinómicas como funciones coordenadas generalizadas.



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$$

C.C. : $u = 0$ para $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

1.- METODO DE RAYLEIGH-RITZ

La solución de ecuación diferencial hace estacionaria la funcional:

$$I(u) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u \right] dx\,dy$$

$$u = 0 \quad \text{para} \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Se considerarán soluciones aproximadas del tipo:

$$u_N = (x^2-1)(y^2-1)\left[a_1 + a_2(x^2+y^2) + a_3(x^4+x^2y^2+y^4) + \cdots\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x,y)$$

Obsérvese que se toman funciones $\varphi_i(x,y)$ simétricas respecto a los ejes coordenados por serlo también la ecuación diferencial y las condiciones de contorno.

1.1.- N=1

Se considera

$$u_1 = a_1(x^2-1)(y^2-1)$$

$$I(u_1) = 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[2a_1^2x^2(y^2-1)^2 + 2a_1^2y^2(x^2-1)^2 + a_1(x^2-1)(y^2-1)\right]dx\,dy$$

$$\frac{\partial I(u)}{\partial a_1} = 4\times 2\int_0^1\int_0^1\left[4a_1x^2(y^2-1)^2 + 4a_1y^2(x^2-1)^2 + (x^2-1)(y^2-1)\right]dx\,dy = 0$$

Resulta:

$$a_1 = -\frac{5}{16} \quad , \text{ con lo cual}$$

$$\boxed{u_1 = -\frac{5}{16}(x^2-1)(y^2-1)}$$

1.2.- $\underline{N=2}$

$$u_2 = (x^2-1)(y^2-1)\left[a_1 + a_2(x^2+y^2)\right]$$

$$I_2 = 4\times 4 \int_0^1\int_0^1 \Big\{ \left[a_1 + a_2(x^2+y^2)\right]^2\left[(x^2-1)^2+(y^2-1)^2\right] +$$

$$+ a_2^2(x^2-1)^2(y^2-1)^2(x^2+y^2) +$$

$$+ 2(x^2-1)(y^2-1)\left[a_1a_2 + a_2^2(x^2+y^2)\right]\left[x(y^2-1)+y(x^2-1)\right] +$$

$$\frac{1}{2}(x^2-1)(y^2-1)\left[a_1 + a_2(x^2+y^2)\right]\Big\} dx\, dx$$

$$I_2 = 32\left(\frac{8}{45}a_1^2 + \frac{352}{4725}a_2^2 + \frac{192}{1575}a_1a_2 + \frac{1}{9}a_1 + \frac{2}{45}a_2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial I_2}{\partial a_1} = 32\left(\dfrac{16}{45}a_1 + \dfrac{192}{1575}a_2 + \dfrac{1}{9}\right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial I_2}{\partial a_2} = 32\left(\dfrac{704}{4725}a_2 + \dfrac{192}{1575}a_1 + \dfrac{2}{45}\right) = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} a_1 = -\dfrac{1295}{4432} \, . \\[2ex] a_2 = -\dfrac{525}{8864} \, . \end{array}$$

$$\boxed{u_2 = -(x^2-1)(y^2-1)\left[\frac{1295}{4432} + \frac{525}{8864}(x^2+y^2)\right]}$$

METODO DE GALERKIN

Se considera como solución aproximada

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \, \phi_i(x,y)$$

2.1.- N=1

$$u_1 = a_1 (x^2-1)(y^2-1)$$

$$\boxed{\varepsilon_1 = 2a_1(x^2+y^2-2)-1}$$

Condición:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varepsilon_1 \cdot \phi_1 \, dx\, dy = 4\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} \left[2a_1(x^2+y^2-2)-1\right](x^2-1)(y^2-1)\, dx\, dy = 0$$

Resulta:

$$a_1 = -\frac{5}{16}$$

$$\boxed{u_1 = -\frac{5}{16}(x^2-1)(y^2-1)}$$

2.2. N=2

$$u_2 = (x^2-1)(y^2-1)\left[a_1 + a_2(x^2+y^2)\right]$$

$$\varepsilon_2 = 2a_1(x^2+y^2-2) + 2a_2\left[(6x^2-1)(y^2-1)+(x^2-1)(6y^2-1)+x^4-x^2+y^4-y^2\right]-1$$

Condiciones

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varepsilon_2\, \phi_1 \, dx\, dy = 0 \quad ; \quad \phi_1 = (x^2-1)(y^2-1)$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varepsilon_2\, \phi_2 \, dx\, dy = 0 \quad ; \quad \phi_2 = (x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2)$$

$$a_1 = -\frac{1295}{4432} \quad ; \quad a_2 = -\frac{525}{8864}$$

Idéntico resultado al obtenido por el método de Rayleigh-Ritz.

METODO DE COLOCACION

3.1. $N=1$

$$\varepsilon_1 = 2a_1(x^2+y^2-2) - 1$$

Haciendo, por ejemplo, $\varepsilon_1(0,0)=0$, resulta

$$a_1 = -\frac{1}{4}\ , \text{ luego}$$

$$\boxed{u_1 = -\frac{1}{4}(x^2-1)(y^2-1)}$$

3.2.- $N=2$

$$\varepsilon_2 = 2a_1(x^2+y^2-2) + 2a_2\left[(6x^2-1)(y^2-1) + (x^2-1)(6y^2-1) + x^4-x^2+y^4-y^2\right] - 1$$

Condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_2(0,0)=0 \\ \varepsilon_2(1/2,1/2)=0 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = -\frac{25}{84} \\ a_2 = -\frac{1}{21} \end{array}\right.$$

$$\boxed{u_2 = -(x^2-1)(y^2-1)\left[\frac{25}{84} + \frac{1}{21}(x^2+y^2)\right]}$$

Obsérvese que dada la simetría se cumple:

$$\varepsilon_2(1/2,1/2) = \varepsilon_2(-1/2,1/2) = \varepsilon_2(1/2,-1/2) = \varepsilon_2(-1/2,1/2) = 0$$

4.- METODO DE LOS SUBDOMINIOS

4.1. $N=1$

Se puede hacer.

$$\int_0^1\int_0^1 \varepsilon_1(x,y)\,dx\,dy = 0$$

con lo cual, por simetría, se minimiza en la media el error en los cuatro cuadrantes, resultando

$$a_1 = -\frac{3}{8}$$

$$\boxed{u_1 = -\frac{3}{8}(x^2-1)(y^2-1)}$$

N=2

Se puede hacer:

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^1\int_0^1 \varepsilon_2(x,y)\,dx\,dy \\ \int_0^{1/2}\int_0^{1/2} \varepsilon_2(x,y)\,dx\,dy\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = -\frac{141}{952} \\ a_2 = -\frac{180}{952}\end{array}\right.$$

$$\boxed{u_2 = -(x^2-1)(y^2-1)\left[\frac{141}{952} + \frac{180}{952}(x^2+y^2)\right]}$$

6.- METODO DE LAS FUNCIONES PESANTES

Dada la simetría del problema la serie de funciones pesantes que se considera es:

$$1,\ x^2y^2,\ x^4y^4,\ \ldots$$

6.1. N=1

$$g_1(x,y) = 1$$

Condición:

$$\int_0^1\int_0^1 \varepsilon_1 \cdot g_1\,dx\,dy = 0 \longrightarrow a_1 = -\frac{3}{8}$$

$$\boxed{u_1 = -\frac{3}{8}(x^2-1)(y^2-1)}$$

6.2.- N=2

$$g_1(x,y) = 1 \quad ; \quad g_2(x,y) = x^2y^2$$

Condiciones

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^1\int_0^1 \varepsilon_2 \cdot 1\,dx\,dy = 0 \\ \int_0^1\int_0^1 \varepsilon_2 \cdot x^2y^2\,dx\,dy = 0\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = -\frac{27}{128} \\ a_2 = -\frac{35}{256}\end{array}\right.$$

$$\boxed{u_2 = -(x^2-1)(y^2-1)\left[\frac{27}{128} + \frac{35}{256}(x^2+y^2)\right]}$$

METODO DEL ERRO CUADRATICO MINIMO

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i$$

$$\langle \varepsilon_N , L\phi_n \rangle = 0 \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots, N$$

6.1. N = 1

$$\phi_1 = (x^2-1)(y^2-1)$$

$$L\phi_1 = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 2(x^2+y^2-2)$$

Condición:

$$\int_0^1 \int_0^1 \varepsilon_1 (x^2+y^2-2)\,dx\,dy = 0 \longrightarrow a_1 = -\frac{15}{44}$$

$$\boxed{u_1 = -\frac{15}{44}(x^2-1)(y^2-1)}$$

6.2. N = 2

$$L\phi_1 = 2(x^2+y^2-2)$$

$$\phi_2 = (x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2)$$

$$L\phi_2 = (12x^2-2)(y^2-1) + (x^2-1)(12y^2-2) + 2(x^4-x^2+y^4-y^2)$$

Condiciones

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1\int_0^1 \varepsilon_2 \cdot L\phi_1\,dx\,dy = 0 \\ \int_0^1\int_0^1 \varepsilon_2 \cdot L\phi_2\,dx\,dy = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} a_1 &= -\frac{74235}{255452} \\ a_2 &= -\frac{15960}{255452} \end{aligned}\right.$$

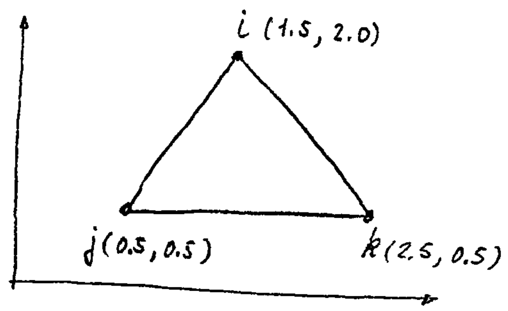
$$\boxed{u_2 = -(x^2-1)(y^2-1)\left[\frac{74235}{255452} + \frac{15960}{255452}(x^2+y^2)\right]}$$

Ejercicio 3.1

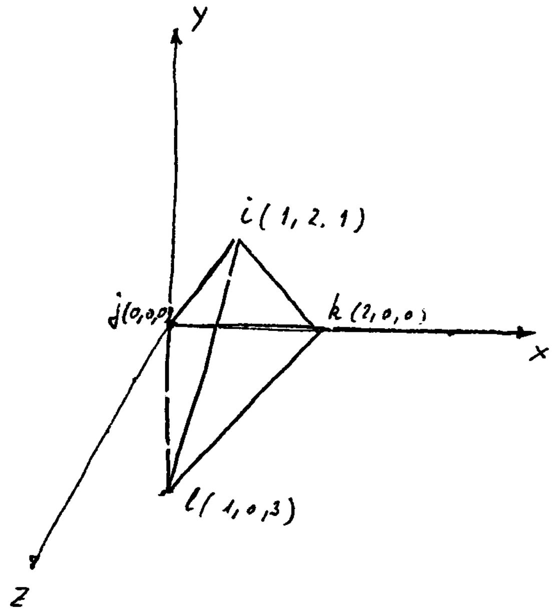
Obtener las funciones de forma de clase C^0 y en coordenadas cartesianas de los siguientes elementos:

a)

b)



c)



a) Sea una función cualquiera

$$u = ax + b = [x \quad 1]\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad [1]$$

Imponiendo las condiciones

$$u\big|_{x=x_i} = u_i \quad ; \quad u\big|_{x=x_j} = u_j$$

se tiene

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b = u_i \\ 4.5a + b = u_j \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underline{C}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = C^{-1}\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = -\frac{1}{2.5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4.5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

y sustituyendo en (1)

$$u = \frac{1}{2.5}[x \quad 1]\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4.5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = [N_i \quad N_j]\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

resulta

$$\boxed{\begin{array}{l} N_i = \frac{1}{2.5}(4.5 - x) \\ N_j = \frac{1}{2.5}(x - 2) \end{array}}$$

b) Se procede de manera similar

$$u = ax + by + c = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x = x_i \\ y = y_i \end{array}\right\} \Longrightarrow 1.5a + 2b + c = u_i \\ \left.\begin{array}{l} x = x_j \\ y = y_j \end{array}\right\} \Rightarrow 0.5a + 0.5b + c = u_j \\ \left.\begin{array}{l} x = x_k \\ y = y_k \end{array}\right\} \Rightarrow 2.5a + 0.5b + c = u_k \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C} = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \\ 2.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 1.5 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4.25 & -0.25 \end{bmatrix}$$

Entonces;

$$[N_i \quad N_j \quad N_k] = \frac{1}{3}\,[x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 1.5 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4.25 & -0.25 \end{bmatrix}$$

Con lo cual

$$\boxed{\begin{aligned} N_i &= \tfrac{1}{3}(2y-1) \\ N_j &= \tfrac{1}{3}(-1.5x - y + 4.25) \\ N_j &= \tfrac{1}{3}(1.5x - y - 0.25) \end{aligned}}$$

c)

$$u = ax + by + cz + d = [x, y, z, 1]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{C}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

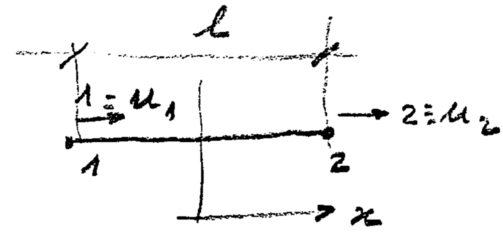
Resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} N_i &= \frac{y}{2} \\ N_j &= \frac{-3x - y - z + 6}{6} \\ N_k &= \frac{3x - y - z}{6} \\ N_l &= \frac{-y + 2z}{6} \end{aligned}}$$

Ejercicio 3.2

Deducir para una barra recta con dos nudos, las funciones de forma para un problema de clase a) $C^{(0)}$ b) $C^{(1)}$ c) $C^{(2)}$.

Enumerar las propiedades que deben satisfacer estas funciones de forma. Comprobarlas.



a) Problema $C^{(0)}$

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\bar{x})$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1+\bar{x})$$

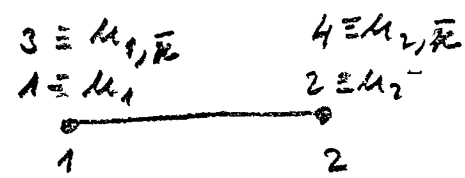
$$\bar{x} = \frac{x - x_m}{l} \cdot 2$$

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$l = x_2 - x_1$$

Condiciones: $N_i(x_j) = \delta_{ij}$

$$\sum N_i = 1$$



b) Problema $C^{(1)}$

$$N_1 = \frac{1}{4}(2+\bar{x})(\bar{x}-1)^2$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(2-\bar{x})(x-1)^2$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(\bar{x}-1)^2(\bar{x}+1)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(x+1)^2(x-1)$$

Condiciones

$N_1(\bar{x}_1) = 1$	$N_1(\bar{x}_2) = 0$	$N_{1,\bar{x}}(\bar{x}_i) = 0$	$i = 1,2$
$N_2(\bar{x}_2) = 1$	$N_2(\bar{x}_1) = 0$	$N_{2,\bar{x}}(\bar{x}_i) = 0$	$i = 1,2$
$N_{3,\bar{x}}(\bar{x}_1) = 1$	$N_{3,\bar{x}}(\bar{x}_2) = 0$	$N_3(\bar{x}_i) = 0$	$i = 1,2$
$N_{4,\bar{x}}(\bar{x}_2) = 1$	$N_{4,\bar{x}}(\bar{x}_1) = 0$	$N_4(\bar{x}_i) = 0$	$i = 1,2$

Movimientos de sólido rígido $u(\bar{x}) = u_0 + \theta_0 \bar{x}$

resulta entonces:

$$N_1 + N_2 = 1$$

$$(N_2 - N_1) + (N_3 + N_4) = \bar{x}$$

c) Problema $C^{(2)}$

$5 \equiv u_{1,\bar{x}}$ $\qquad 6 \equiv u_{2,\bar{x}}$

$3 \equiv u_{1,\bar{x}}$ $\qquad 4 \equiv u_{2,\bar{x}}$

$1 \equiv u_1$ $\qquad 2 \equiv u_2$

$$N_1 = \frac{1}{16}(1-\bar{x})^3(8+9\bar{x}+3\bar{x}$$

$$N_2 = \frac{1}{16}(1+\bar{x})^3(8-9\bar{x}+3\bar{x}^2)$$

$$N_3 = \frac{1}{16}(1-\bar{x})^3(1+\bar{x})(3\bar{x}+5)$$

$$N_4 = \frac{1}{16}(1+\bar{x})^3(1-\bar{x})(3\bar{x}-5)$$

$$N_5 = \frac{1}{16}(1-\bar{x})^3(1+\bar{x})^2$$

$$N_6 = \frac{1}{16}(1+\bar{x})^3(1-\bar{x})^2$$

Movimientos de "sólido rígido" $u(\bar{x}) = u_0 + \theta_0 \bar{x} + \frac{1}{2}\theta_1 \bar{x}^2$ resulta entonces

$$N_1 + N_2 = 1$$

$$(N_2 - N_1) + (N_3 + N_4) = \bar{x}$$

$$\frac{1}{2}(N_2 + N_1) + (N_4 - N_3) + (N_5 + N_6) = \frac{1}{2}\bar{x}^2$$

esta última condición puede sustituirse por la siguiente

$$(N_4 - N_3) + (N_5 + N_6) = \frac{1}{2}\bar{x}^2 - 1/2$$

Además existen las condiciones de definición obvias:

$$N_i(\bar{x}_j) = \delta_{ij} \qquad N_{i,\bar{x}}(\bar{x}_j) = 0 \qquad N_{i,\bar{x}\bar{x}}(\bar{x}_j) = 0$$

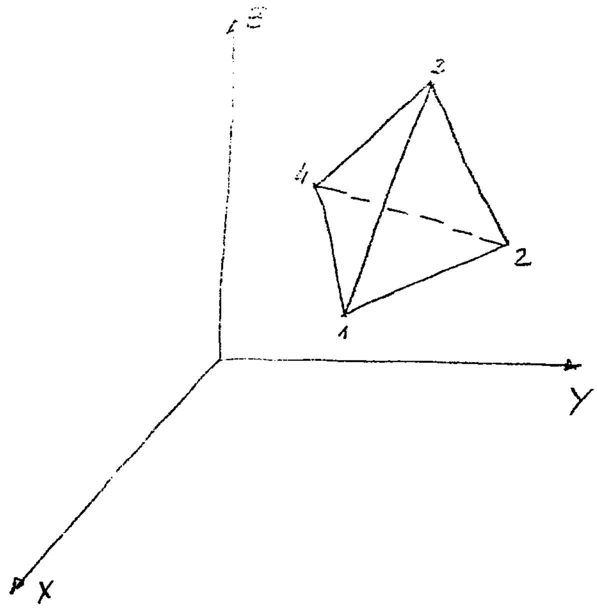
$$N_{i+2,\bar{x}}(\bar{x}_j) = \delta_{ij} \qquad N_{i+2}(\bar{x}_j) = 0 \qquad N_{i+2,\bar{x}\bar{x}}(\bar{x}_j) = 0$$

$$N_{i+4,\bar{x}\bar{x}}(\bar{x}_j) = \delta_{ij} \qquad N_{i+4}(x_j) = 0 \qquad N_{i+4,\bar{x}}(\bar{x}_j) = 0$$

$i, j = 1, 2 \qquad \delta_{ij}$ la delta de Kronecker.

Ejercicio 3.3

Condiciones que han de cumplir las funciones de forma de clase C^0 para un elemento tetraédrico.



Se tiene:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \qquad [1]$$

Aparte de las condiciones obvias:

$$N_i(x_j, y_j, z_j) = \delta_{ij} \qquad \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

han de reflejar la deformación nula, es decir, para este caso, el movimiento de sólido rígido que en general se compondrá de una traslación y un giro:

TRASLACION

Si el tetraedro experimenta una traslación definida por el vector $\bar{V}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, ($\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, valores concretos), todos sus puntos, incluidos los vértices, sufrirán este mismo movimiento ($\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$), es decir, según [1]

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{u} \\ \bar{u} \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{v} \\ \bar{v} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ \bar{w} \\ \bar{w} \\ \bar{w} \end{bmatrix}$$

de donde se tiene la 1ª condición:

$$\boxed{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1}$$

GIRO

Un giro del tetraedro alrededor de cualquier recta puede ser considerado como combinación lineal de los giros alrededor de los ejes de coordenadas.

Considérese el giro alrededor del eje Oz, el cual, para un punto cualquiera $P(x, y, z)$, equivale a una traslación dada por el vector

$$\bar{v} = \bar{k} \wedge \bar{r}$$

siendo $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ el vector de posición del punto P

es decir

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\bar{i} + x\bar{j}$$

En particular, para un vértice i, se tendrá:

$$\bar{v}_i = -y_i \bar{i} + x_i \bar{j}$$

y considerando la expresión [1], se ha de cumplir:

$$\begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \\ -y_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum X_i N_i = x \\ \sum Y_i N_i = y \end{array}}$$

y considerando el giro alrededor del eje OX ó OZ se obtendría

$$\boxed{\sum z_i N_i = z}$$

siendo x_i, y_i, z_i las coordenadas del nudo i.

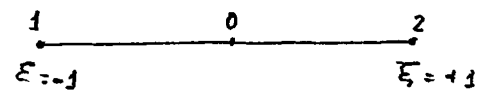
Ejercicio 3.4

Condiciones que han de cumplir las funciones de forma de un elemento unidimensional en los casos:

a) De clase C^1

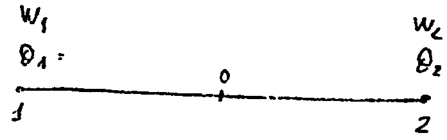
b) De clase C^2

En ambos casos han de reflejar la deformación nula. Se considerarán coordenadas locales ξ



a) Clase C^1

Los grados de libertad básicos son los de la figura:



$$w = [N_1, N_2, N_3, N_4] \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

El estado más general de deformación nula es el producido por una traslación w_0 y un giro θ_0 alrededor de 0. Se tiene entonces que se ha de verificar

$$w_0 + \theta_0 \xi = [N_1, N_2, N_3, N_4] \times \left[\begin{bmatrix} w_0 \\ 0 \\ w_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\theta_0 \\ \theta_0 \\ \theta_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} \right]$$

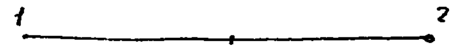
De donde se obtienen las condiciones

$$\boxed{N_1 + N_3 = 1}$$

$$\boxed{N_3 - N_1 + N_2 + N_4 = \xi}$$

b) Clase C^2

Grados de libertad básicos :



$$\begin{array}{lcl} 1 & & 2 \\ w_1 & & w_2 \\ \theta_1 = & & \theta_2 \\ k_1 & & k_2 \end{array}$$

$$W = [N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6] \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ k_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ k_2 \end{bmatrix}$$; k es la curvatura o variación segunda de la flecha

El estado de "deformación nula" en este caso es el producido por traslación w_0, giro θ_0 y deformación con curvatura constante k_0. Se ha de verificar

$$w_0 + \theta_0 \xi + \frac{1}{2} k_0 \xi^2 = [N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6] \left[\begin{bmatrix} w_0 \\ 0 \\ 0 \\ w_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\theta_0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ \theta_0 \\ \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} k_0 \\ -k_0 \\ k_0 \\ \frac{1}{2} k_0 \\ k_0 \\ k_0 \end{bmatrix} \right]$$

Es decir:

$$\boxed{\begin{aligned} & N_1 + N_4 = 1 \\ & N_4 - N_1 + N_2 + N_5 = \xi \\ & \frac{1}{2}(N_1 + N_4) + N_5 - N_2 + N_3 + N_6 = \xi^2 \end{aligned}}$$

Ejercicio 9.5.

Determinar las funciones de forma de los elementos con continuidad C°, de tipo rectangular de la figura E9.1a.

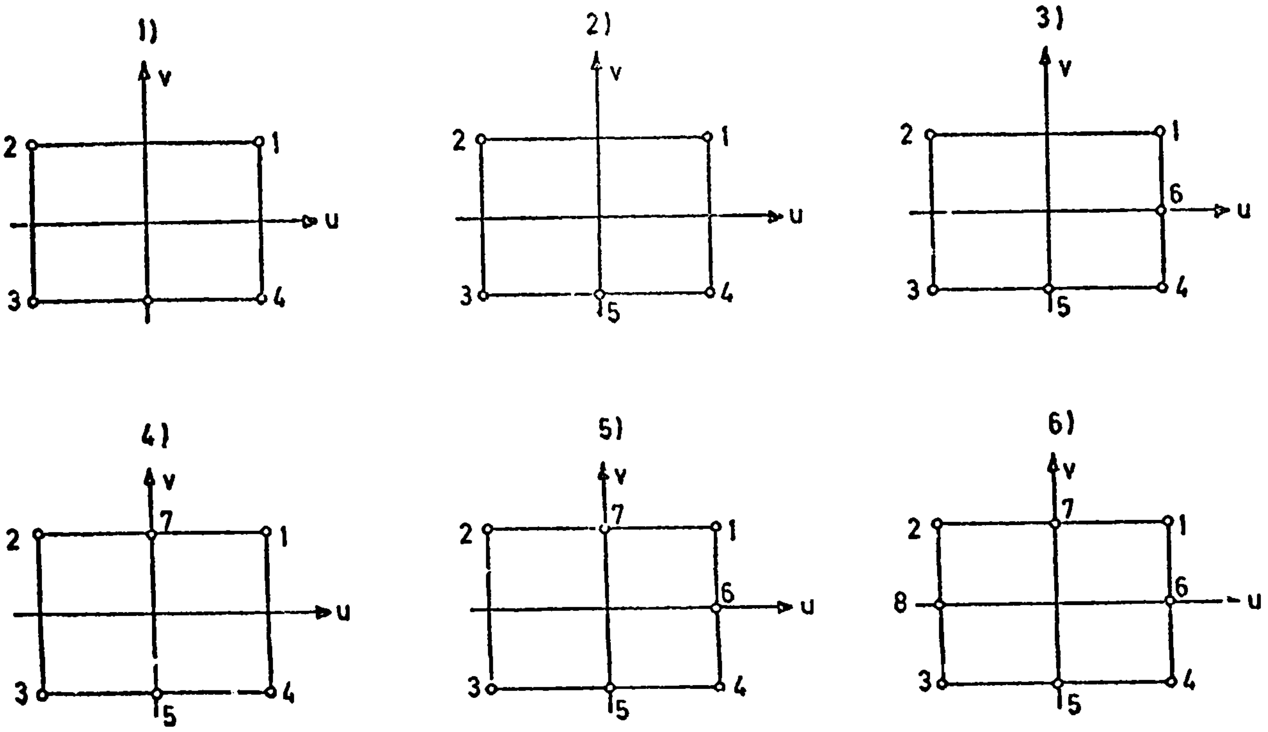


Fig. E9.1a

1)

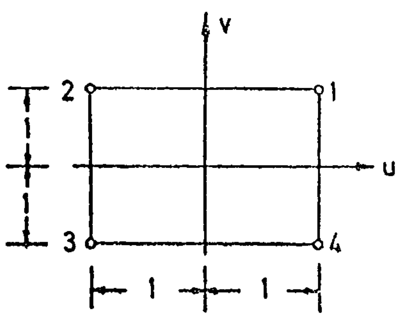
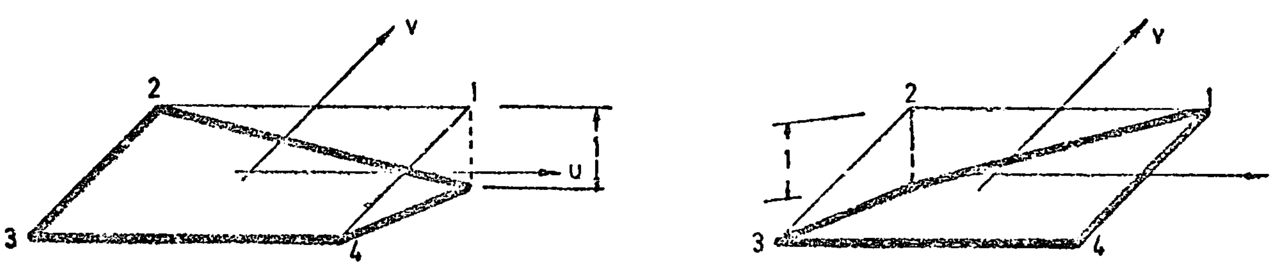


Fig. E9.1b

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+u)\,(1+v)$$
$$N_2 = \frac{1}{4}(1-u)\,(1+v)$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1-u)\,(1-v)$$
$$N_4 = \frac{1}{4}(1+u)\,(1-v)$$



$N_1 = \frac{1}{4}(1+u)(1+v)$ $\qquad$ $N_2 = \frac{1}{4}(i-u)(1+v)$

Fig. E9.1c

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+u)\,(1+v) \qquad N_2 = \frac{1}{4}(1-u)\,(1+v)$$

2)

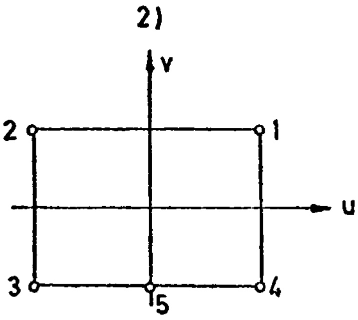


Fig. E9.1d

Para el nudo 5(0,-1), los valores de las funciones de forma anteriores son:

$N_1^5=0$, $N_2^5=0$, $N_3^5=\frac{1}{2}$ y $N_4^5=\frac{1}{2}$

La función de forma N_5 es: $N_5 = 1-u^2$,

por lo tanto las nuevas funciones de forma son:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+u)(1+v) - N_1^5\ N_5 = \frac{1}{4}(1+u)(1+v)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-u)(1+v) - N_2^5\ N_5 = \frac{1}{4}(1-u)(1+v)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-u)(1-v) - N_3^5\ N_5 = \frac{1}{4}(1-u)(1-v) - \frac{1}{2}(1-u^2) = -\frac{1}{4}(1-u)(1+2u+v)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+u)(1-v) - N_4^5\ N_5 = \frac{1}{4}(1+u)(1-v) - \frac{1}{2}(1-u^2) = -\frac{1}{4}(1+u)(1-2u+v)$$

$$N_5 = 1-u^2$$

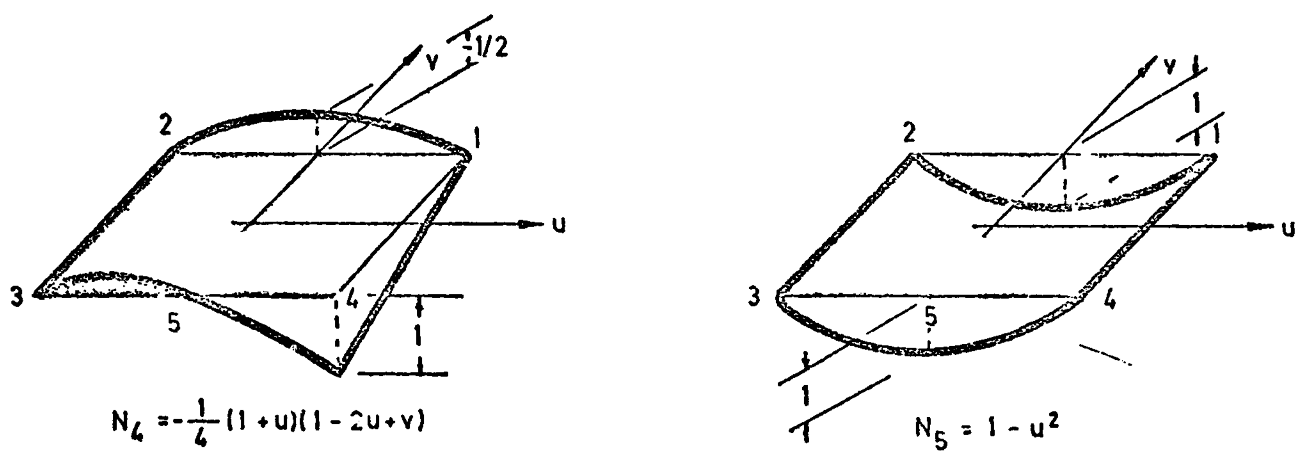


Fig. E9.1e

3)

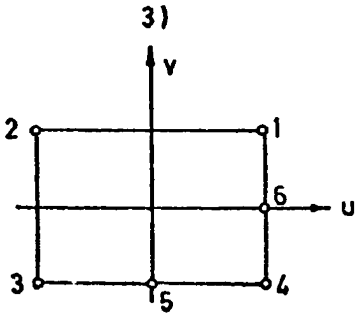


Fig. E9.1i

Para el nudo 6(1,0), los valores de la función de forma anteriores son:
$N_1^6 = \frac{1}{2}$, $N_2^6 = 0$, $N_3^6 = 0$, $N_4^6 = \frac{1}{2}$, $N_5^6 = 0$
La función de forma nueva N_6, es: $N_6 = 1-v^2$, por lo que se obtienen las nuevas funciones de forma:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+u)(1+v) - N_1^6 \, N_6 = \frac{1}{4}(1+u)(1+v) - \frac{1}{2}(1-v^2) = -\frac{1}{4}(1+v)(1+u-2v)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-u)(1+v) - N_2^6 \, N_6 = \frac{1}{4}(1-u)(1+v)$$

$$N_3 = -\frac{1}{4}(1+u)(1+2u+v) - N_3^6 \, N_6 = -\frac{1}{4}(1-u)(1+2u+v)$$

$$N_4 = -\frac{1}{4}(1+u)(1-2u+v) - N_4^6 \, N_6 = -\frac{1}{4}(3-u+v-2u^2+uv-v^2)$$

$$N_5 = 1-u^2 - N_5^6 \, N_6 = 1-u^2$$

$$N_6 = 1-v^2$$

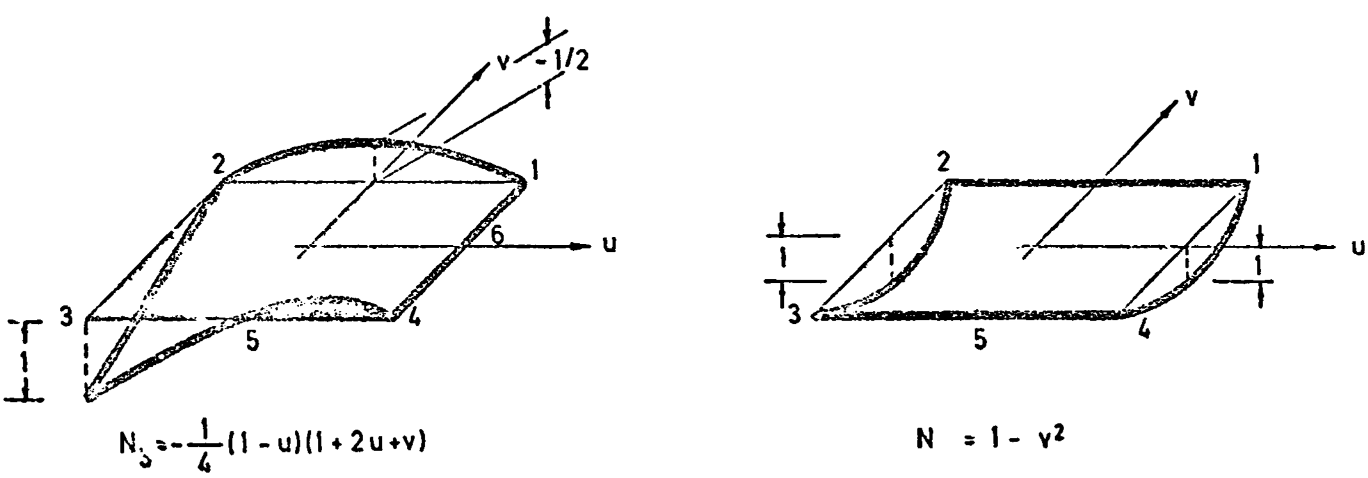


Fig. E9.1g

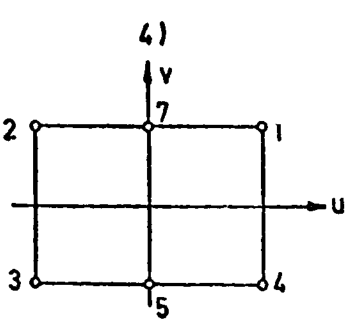


Fig. E9.1h

Para el nudo 7(0,1), los valores de las funciones de forma anteriores son:

$N_1^7 = \frac{1}{2}$; $N_2^7 = \frac{1}{2}$; $N_3^7 = -\frac{1}{2}$; $N_4^7 = -\frac{1}{2}$; $N_5^7 = 1$

La nueva función de forma N_7 es:

$N_7 = \frac{1}{2}(1-u^2)(1+v)$, por lo que se obtienen las nuevas funciones de forma:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+u)(1+v) - N_1^7 \; N_7 = \frac{1}{4}(1+u)(1+v) - \frac{1}{4}(1-u^2)(1+v) = \frac{1}{4}u(1+u)(1+v)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-u)(1+v) - N_2^7 \; N_7 = \frac{1}{4}(1-u)(1+v) - \frac{1}{4}(1-u^2)(1+v) - \frac{1}{4}u(1-u)(1+v) =$$

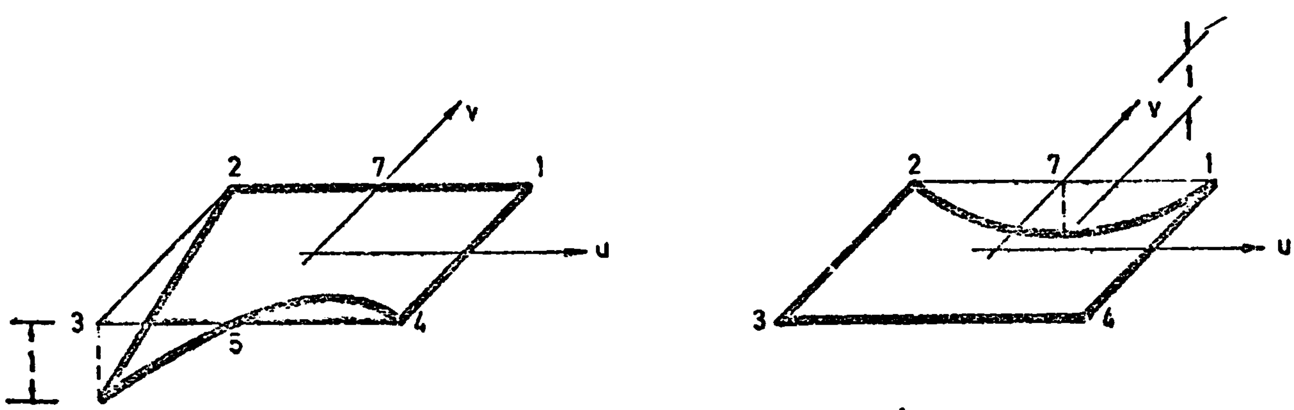
$$-\frac{1}{4}u(1-u)(1-v)$$

$$N_3 = -\frac{1}{4}(1-u)(1+2u+v) - N_3^7 \; N_7 = -\frac{1}{4}(1-u)(1+2u+v) + \frac{1}{4}(1-u^2)(1+v) = -\frac{1}{4}u(1-u)(1-v)$$

$$N_4 = -\frac{1}{4}(1+u)(1-2u+v) - N_4^7 \; N_7 = -\frac{1}{4}(1+u)(1-2u+v) + \frac{1}{4}(1-u^2)(1+v) = \frac{1}{4}u(1+u)(1-v)$$

$$N_5 = 1-u^2 - N_5^7 \; N_7 = 1-u^2 - \frac{1}{2}(1-u^2)(1+v) = \frac{1}{2}(1-u^2)(1-v)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-u^2)(1+v)$$



$N_3 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1-v)$ $\qquad$ $N_7 = \frac{1}{2}(1-u^2)(1+v)$

Fig E9.1i

5)

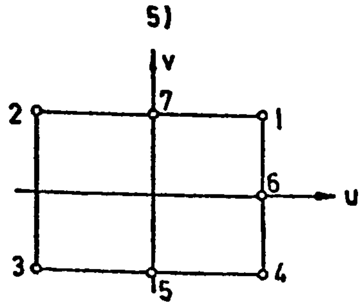


Fig. E9.1j

Para el nudo 6(1,0), los valores de las funciones de forma anteriores son:

$N_1^6 = \frac{1}{2}$; $N_2^6 = 0$; $N_3^6 = 0$; $N_4^6 = \frac{1}{2}$; $N_5^6 = 0$; $N_7^6 = 0$

La función de forma nueva N_6 es: $N_6 = 1 - v^2$,

por lo tanto las nuevas funciones de forma son:

$$N_1 = \frac{1}{4}u(1+u)(1+v) - N_1^6\, N_6 = \frac{1}{4}u(1+u)(1+v) - \frac{1}{2}(1-v^2) = \frac{1}{4}(1+v)(u+u^2-2+2v)$$

$$N_2 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1+v) - N_2^6\, N_6 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1+v)$$

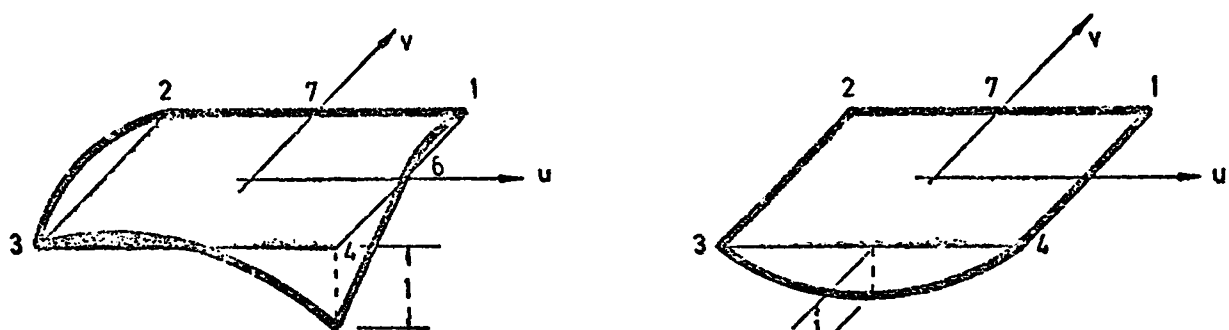
$$N_3 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1-v) - N_3^6\, N_6 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1-v)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}u(1+u)(1-v) - N_4^6\, N_6 = \frac{1}{4}u(1+u)(1-v) - \frac{1}{2}(1-v^2) = \frac{1}{4}(1-v)(u+u^2-2-2v)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-u^2)(1-v) - N_5^6\, N_6 = \frac{1}{2}(1-u^2)(1-v)$$

$$N_6 = 1-v^2$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-u^2)(1+v)$$



$N_4 = \frac{1}{4}(1-v)(u+u^2-2-2v)$ $\qquad$ $N_5 = \frac{1}{2}(1-u)(1-v)$

Fig.E9.1 k

6)

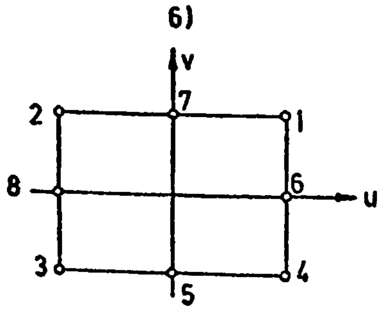


Fig. E9.1 l

Para el nudo 8(-1,0), los valores de las anteriores funciones de forma son:

$N_1^8 = -\frac{1}{2}$; $N_2^8 = \frac{1}{2}$; $N_3^8 = \frac{1}{2}$; $N_4^8 = -\frac{1}{2}$; $N_5^8 = 0$;

$N_6^8 = 1$; $N_7^8 = 0$

La función de forma nueva N_8 es:

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-u)(1-v^2)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+v)(u+u^2-2+2v) - N_1^8 N_8 = \frac{1}{4}(1+v)(u+u^2-2+2v) + \frac{1}{4}(1-u)(1-v^2) =$$

$$\frac{1}{4}(1+v)(u^2-1+v+uv) = \frac{1}{4}(1+v)(1+u)(u+v-1)$$

$$N_2 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1+v) - N_2^8 N_8 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1+v) - \frac{1}{4}(1-u)(1-v^2) = -\frac{1}{4}(1-u)(1+v)(u-v+1$$

$$N_3 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1-v) - N_3^8 N_8 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1-v) - \frac{1}{4}(1-u)(1-v^2) = -\frac{1}{4}(1-u)(1+v)(u+v+1$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-v)(u+u^2-2-2v) - N_4^8 N_8 = \frac{1}{4}(1-v)(u+u^2-2-2v) + \frac{1}{4}(1-u)(1-v^2) =$$

$$\frac{1}{4}(1-v)(u^2-1-v-uv) = \frac{1}{4}(1-v)(u+1)(u-v-1)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-u^2)(1-v)$$

$$N_6 = 1-v^2-\frac{1}{2}(1-u)(1-v^2) = \frac{1}{2}(1+u)(1-v^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-u^2)(1+v)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-u)(1-v^2)$$

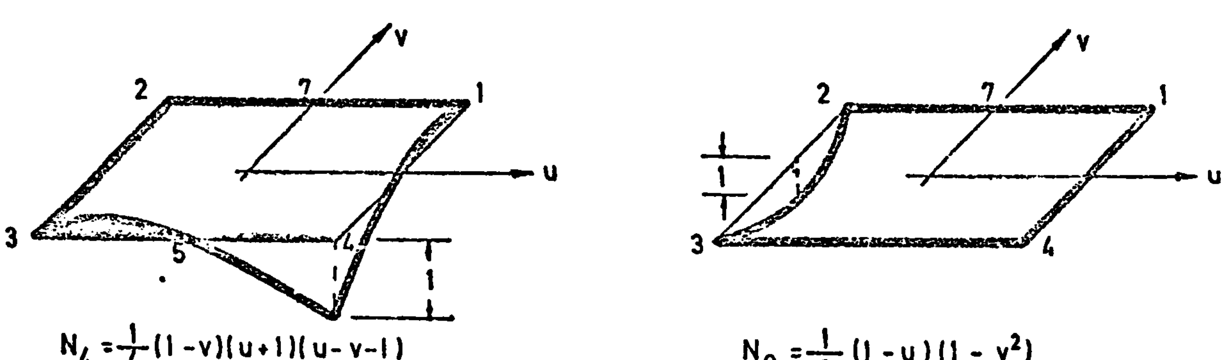


Fig. E9.1m

Ejercicio 3.6.

Determinar las funciones de forma de los elementos con continuidad C°, de tipo triangular de la figura E9.2a.

Utilizar coordenadas naturales o triangulares.

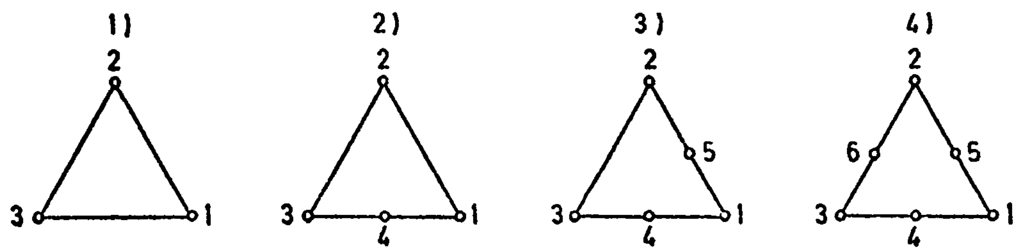


Fig. E9.2a

1) Las funciones de forma son:

$N_1 = L_1$

$N_2 = L_2$

$N_3 = L_3$

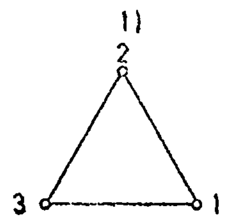


Fig. E9.2 b

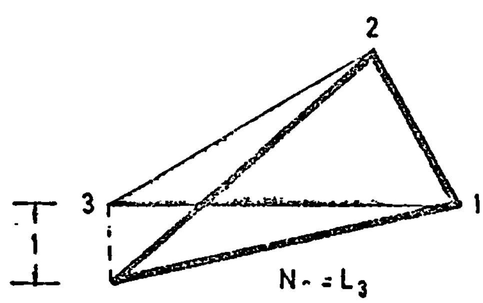


Fig. E9.2 c

2)

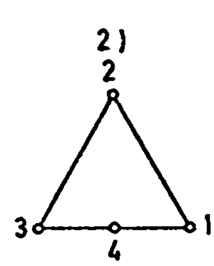


Fig. E9.2 d

Para el nudo 4(1/2,0,1/2), los valores de las funciones de forma anteriores son:

$N_1^4 = \frac{1}{2}$; $N_2^4 = 0$; $N_3^4 = \frac{1}{2}$

La nueva función de forma N_4, es:

$N_4 = 4\ L_1 \cdot L_3$

Por lo tanto

$$N_1 = L_1 - N_1^4\ N_4 = L_1 - 2L_1L_3 = L_1(1-2L_3)$$

$$N_2 = L_2 - N_2^4\ N_4 = L_2$$

$$N_3 = L_3 - N_3^4\ N_4 = L_3 - 2L_1L_3 = L_3(1-2L_1)$$

$$N_4 = 4L_1L_3$$

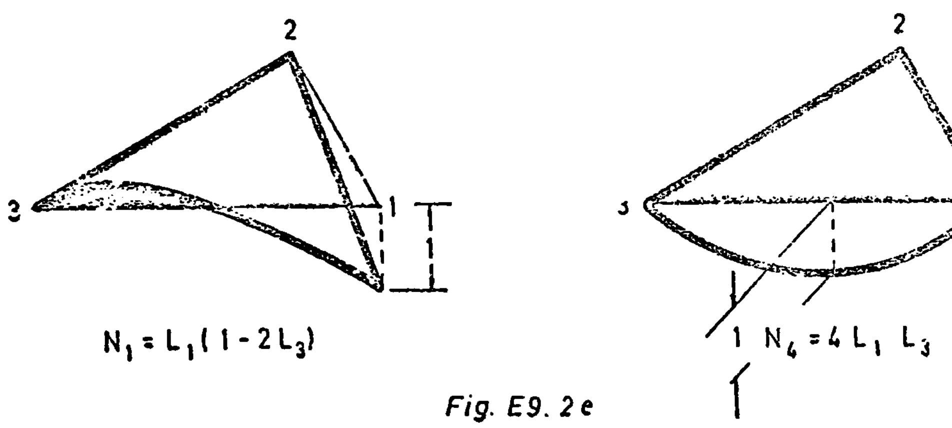


Fig. E9. 2e

Para el nudo $5(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, los valores de las anteriores funciones de forma, son:

$N_1^5 = \frac{1}{2}$; $N_2^5 = \frac{1}{2}$; $N_3^5 = 0$; $N_4^5 = 0$

La nueva función de forma N_5, es:

$$N_5 = 4L_1L_2$$

For lo tanto:

$$N_1 = L_1(1-2L_3) - N_1^5\ N_5 = L_1(1-2L_3).2L_1L_2 = L_1(1-2L_2-2L_3)$$

$$N_2 = L_2 - N_2^5\ N_5 = L_2 - 2L_1L_2 = L_2(1-2L_1)$$

$$N_3 = L_3(1-2L_1)$$

$N_4 = 4L_1L_3$

$N_5 = 4L_1L_2$

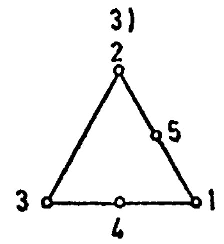
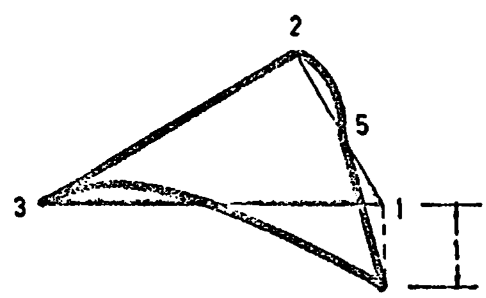


Fig.E9.2f



$N_1 = L_1(1-2L_2-2L_3)$

Fig.E9. 2g

4)

$N_1 = L_1(1-2L_2-2L_3)$

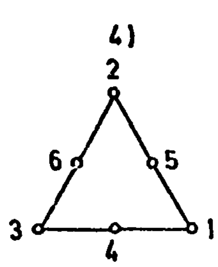


Fig. E9. 2h

Para el nudo 6(0, 1/2, 1/2), los valores de las anteriores funciones de forma son:
$N_1^6 = 0$; $N_2^6 = \frac{1}{2}$: $N_3^6 = \frac{1}{2}$; $N_4^6 = 0$; $N_5^6 = 0$ la nueva función de forma N_6, es: $N_6 = 4L_2L_3$

Por lo tanto:

$N_1 = L_1(1-2L_2-2L_3)$

$N_2 = L_2(1-2L_1) - N_2^6\, N_6 = L_2(1-2L_1) - 2L_2L_3 = L_2(1-2L_1-2L_3)$

$N_3 = L_3(1-2L_1) - N_3^6\, N_6 = L_3(1-2L_1) - 2L_2L_3 = L_3(1-2L_1-2L_2)$

$N_4 = 4L_1L_3$

$N_5 = 4L_1L_2$

$N_6 = 4L_2L_3$

Ejercicio 3.7

A) Deducir los polinomios de Lagrange de orden 1, 2 y 3.

B) Aplicación a la obtención de las funciones de forma de los elementos finitos triángulares C^0.

C) Comprobar en el elemento tríangular de elasticidad plana los requerimientos de convergencia .

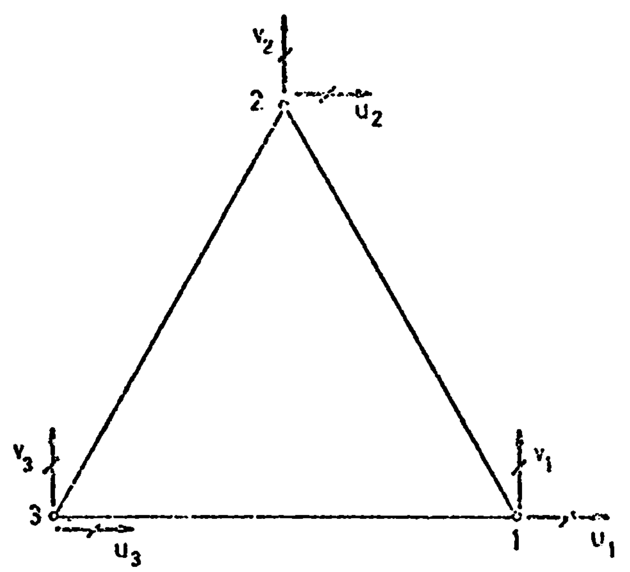


Fig. E9. 3a

A) Una función polinómica de grado n, f(x) que toma los valores f_i para $x=x_i$, con $i=1,2...n$, es:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} P_i^n(x)\ f(x)$$

siendo: donde:

$$P_i^n(x)=\frac{p_i^n(x)}{p_i^n(x_i)}$$

$$p_i^n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_i)\dots(x-x_n)}{x-x_i}$$

Si los puntos $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$ están a intervalos iguales, en un intervalo L se obtiene con $x_i=\frac{L}{n}$.

1) 1^{er} orden (líneal)

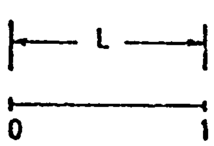


Fig.E9.3b

$$\underline{P}_0^1(x)=1-\frac{x}{L}=p_0^1$$

$$\underline{P}_1^1(x)=\frac{x}{L}=p_1^1$$

2) 2º orden (cuadrático)

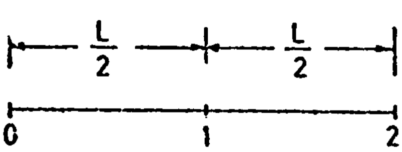


Fig. E9.3c

$$P_0^2(x)=(2\frac{x}{L}-1)(\frac{x}{L}-1)=(1-2p_1^1)p_0^1$$

$$P_1^2(x)=4\frac{x}{L}(1-\frac{x}{L})=4p_0^1p_0^0$$

$$P_2^2(x)=\frac{x}{L}(2\frac{x}{L}-1)=p_1^1(2p_1^1-1)$$

3) 3^{er} orden (cúbico)

$$p_0^3(x)=\frac{1}{2}(1-\frac{3x}{L})(2-\frac{3x}{L})(1-\frac{x}{L})=\frac{1}{2}(1-3p_1^1)p_0^1$$

$$p_1^3(x)=\frac{9}{2}\ \frac{x}{L}(3\frac{x}{L}-2)(\frac{x}{L}-1)=\frac{9}{2}p_1^1(2-3p_1^1)p_0^1$$

$$p_2^3(x)=\frac{9}{2}\ \frac{x}{L}(3\frac{x}{L}-1)(1-\frac{x}{L})=\frac{9}{2}p_1^1(3p_1^1-1)p_0^1$$

$$p_3^3(x)=\frac{1}{2}\ \frac{x}{L}(3\frac{x}{L}-1)(3\frac{x}{L}-2)=\frac{1}{2}p_1^1(3p_1^1-1)(3p_1^1-2).$$

B). Se deduce la aplicación pedida de la tabla siguiente:

Polinomio de Lagrange. Función de forma:

1) Líneal

p_0^1 $\qquad N_1=L_1$

p_1^1 $\qquad N_2=L_2$

$\qquad N_3=L_3$

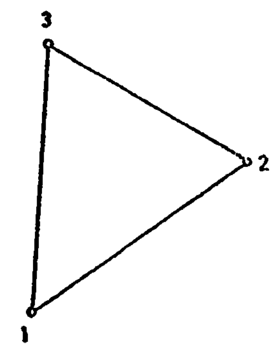


Fig. E9.3 d

2) Cuadrático $\qquad$ Vertices

$p_0^2=(1-2p_1^1)p_0^1 \qquad N_1=(2L_1-1)L_1$

$p_1^2=4p_0^1p_1^1 \qquad N_2=(2L_2-1)L_2$

$p_2^2=(2p_1^1-1)p_1^1 \qquad N_3=(2L_3-1)L_3$

Puntos medios de lados

$N_4=4L_1L_2$

$N_5=4L_2L_3$

$N_6=4L_3L_1$

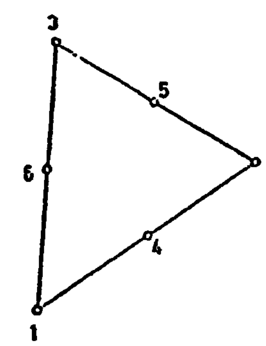


Fig. E9.3e

3) Cúbico $\qquad$ Vértices

$p_0^3=\frac{1}{2}(3p_1^1-1)(3p_1^1-2)p_0^1 \qquad N_1=\frac{1}{2}(3L_1-1)(3L_1-1)L_1$

$p_1^3=\frac{9}{2}p_1^1(3p_0^1-1)p_0^1 \qquad N_2=\frac{1}{2}(3L_2-1)(3L_2-1)L_2$

$p_2^3=\frac{9}{2}p_1^1(3p_1^1-1)p_0^1 \qquad N_3=\frac{1}{2}(3L_3-1)(3L_3-1)L_3$

$p_3^3=\frac{1}{2}p_1^1(3p_1^1-1)(3p_1^2-2)$

Puntos en lados

$N_4=\frac{9}{2}L_1L_2(3L_1-1)$

$N_5=\frac{9}{2}L_1L_2(3L_2-1)$

$N_6=\frac{9}{2}L_2L_3(3L_2-1)$

$N_7=\frac{9}{2}L_2L_3(3L_3-1)$

$N_8=\frac{9}{2}L_3L_1(3L_3-1)$

$N_9=\frac{9}{2}L_3L_1(3L_1-1)$

Nudo interior

$N_{10}=27L_1L_2L_3$

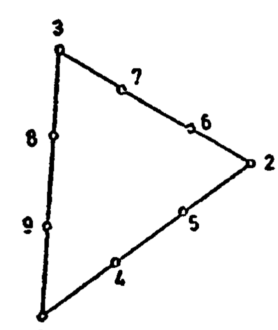


Fig. E9.3 f

Para este nudo interior no existe comparación directa con Lagrange.

c). $u=(N_1,N_2,N_3,----N_6)\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\end{bmatrix}$

$v=(N_1,N_2,N_3----N_6)\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6\end{bmatrix}$

Los requereimientos en convergencia son:

1) Movimientos de sólido rígido a) $u(x)=\text{constante}=u_0$

b) $u(x)=-\theta_0 y$

c) $v(x)=v_0$

d) $v(x)=\theta_0 x$.

Por lo tanto a) $u_1=u_2=u_3=u_4=u_5=u_6=u_0$

lo que implica $u(x)=(N_1,N_2,N_3----N_6)\begin{bmatrix}u_0\\u_0\\u_0\\u_0\\u_0\\u_0\end{bmatrix}=u_0\sum_1^6 N_i=u_0$

Es decir $\sum_1^6 N_i=1$

b) $v_1=v_2--------v_i=v_0$ Análogamente se deduce

$\sum_1^6 N_i=1$

c) $u_1=-\theta_0 y_1,\ u_2=-\theta_0 y_2--------u_6=-\theta_0 y_6$

Por lo tanto

$y=\sum_{i=1} N_i y_i$

d) $v_1=\theta_0 x_1\quad v_2=\theta_0 x_2---------v_0=\theta_0 x_6$

es decir $x=\sum_{i=1}^{6} N_i x_i$

A continuación se comprueban las igualdades anteriores $(L_1+L_2+L_3=1)$:

$$1=\sum_{i=1}^{6}N_i=\sum_{i=1}^{3}(2L_i-1)L_i+4\sum_{i=1}^{3}L_iL_j=2L_1^2+2L_2^2+2L_3^2-(L_1+L_2+L_3)+$$

$$+4(L_1L_2+L_2L_3+L_3L_1)=2(L_1+L_2+L_3)^2-1=1$$

$$y=\sum_{i=1}^{6}N_iy_i \quad \text{con} \quad y_4=\frac{y_1+y_2}{2} \quad y_5=\frac{y_2+y_3}{2} \quad y_6=\frac{y_3+y_1}{2}$$

es decir:

$$y=\sum_{i=1}^{3}(2L_i-1)L_iy_i+2L_1L_2(y_1+y_2)+2L_2L_3(y_2+y_3)+2L_3L_1(y_1+y_3)$$

$$y=(2L_1^2-L_1+2L_1L_3+2L_1L_3)y_1+(2L_2^2-L_2+2L_2L_1+2L_3L_2)y_2+$$
$$+(2L_3^2-L_3+2L_3L_2+2L_1L_3)y_3=L_1y_1+L_2y_2+L_3y_3=y$$

Análogamente se cumple:
$x=\Sigma N_ix_i$.

2) Movimientos de deformación constante

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=a \qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=b \quad \gamma_{iy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=c \qquad (a,b,c,\ \text{constantes})$$

$$u=ax+\psi_1(y) \qquad\qquad v=by+\psi_2(x)$$

$\psi_1'(y)+\psi_2'(x)=c$, luego $\psi_1'(y)$=constante $\psi_2'(x)$= constante

La expresión de los desplazamientos es:

$$u=\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1$$
$$v=\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2$$

Los valores nodales son $u_1=\alpha_1x_1+\beta_1y_1+\gamma_1$, $u_2=\alpha_1x_2+\beta_1y_2+\gamma_1$, ---

$u_0=\alpha_1x_6+\beta_1y_6+\gamma_1$

Sustituido en la expresión de $u=(N_1,N_2,N_3,N_4,N_5,N_6)\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\end{bmatrix}$ se obtiene

$$u=\sum_{i=1}^{6}N_iu_i=\sum_{i=1}^{6}N_i(\alpha_1x_2+\beta_1y_2+\gamma_1)=\alpha_1\sum_{i=1}^{6}N_ix_i+\beta_1\sum_{i=1}^{6}N_iy_i+\gamma_1\sum_{i=1}^{6}N_i=$$

$=\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1$ como se quería demostrar

Análogamente se cumple $v=\sum_{i=1}^{6}N_iv_i$.

2). La continuidad C° se satisface obviamente en los nudos. A lo largo de un lado, las funciones de forma son cuadráticas y están definidos por tres valores. Luego el elemento es conforme.

Ejercicio 3.8

Obtención de las funciones de forma de los elementos de transición utilizados para pasar de zonas con mallas tupidas a otras con mallas más abiertas, obtenidos mediante la introducción de nodos intermedios en alguno de sus lados (marcados con x en la figura adjunta que puede servir de ejemplo ilustrativo).

Estudiar la conformidad del elemento.

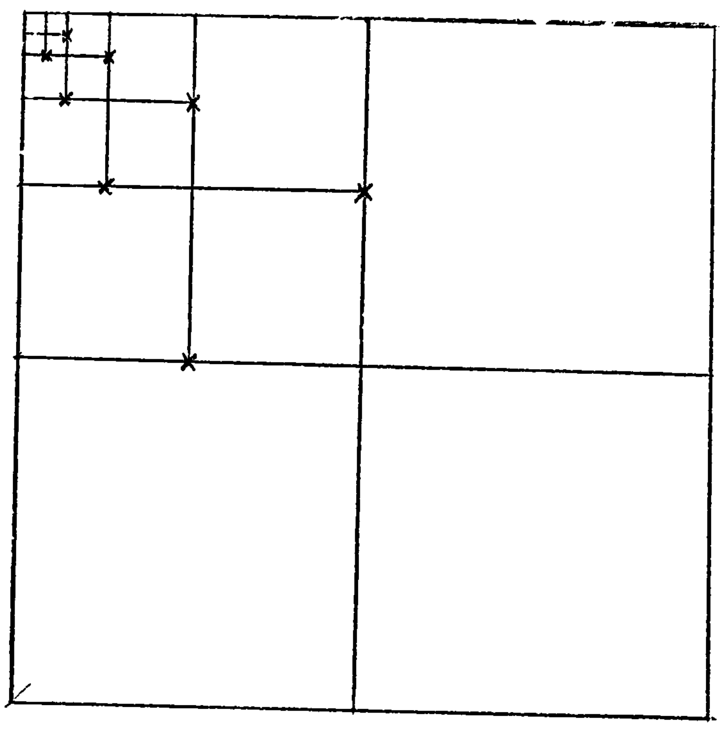


figura 1

Es regla común en el empleo del método de los elementos finitos para el cálculo, el utilizar mallas de elementos que en las zonas de altos gradientes de tensiones sean lo suficientemente cerradas para conseguir la exactitud que se precise, y que se van abriendo en las zonas donde la tensión es relativamente uniforme, todo esto con el fin de disminuir el número de elementos utilizados con objeto de ahorrar memoria y simplificar los cálculos

La malla representada en la figura 1 podría corresponder a un típico problema de deformación plana donde un semiespacio elástico está sometido a la acción de un cuchillo de carga tal como se indica en la figura 2.

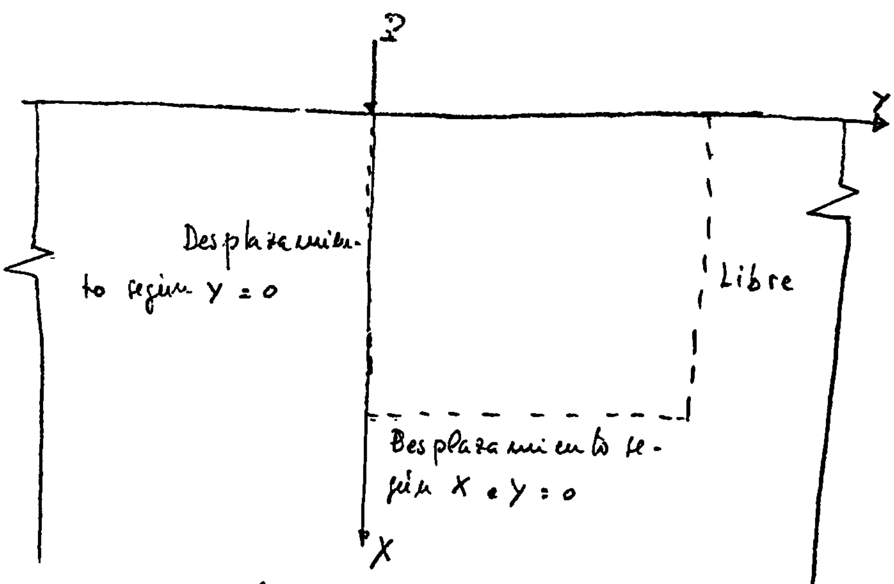


figura 2

El problema es simétrico respecto al plano vertical que contiene al cuchillo de carga por lo que sólo se consideraría en el cálculo la mitad de la sección plana. Es más, a efecto de su resolución mediante el método de los elementos finitos, sólo sería necesario considerar una parte del mismo utilizando las condiciones de contorno apropiadas

Utilizando elementos finitos "standard" podrían emplearse los modelos representados en las figuras 3 y 4.

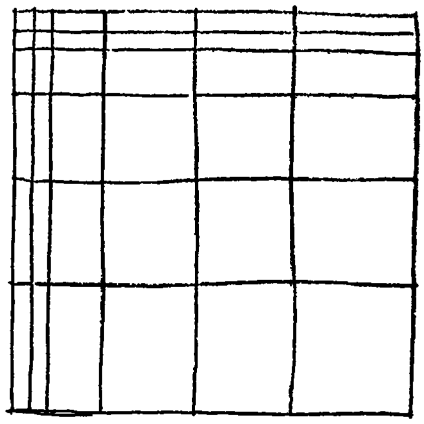


figura 3

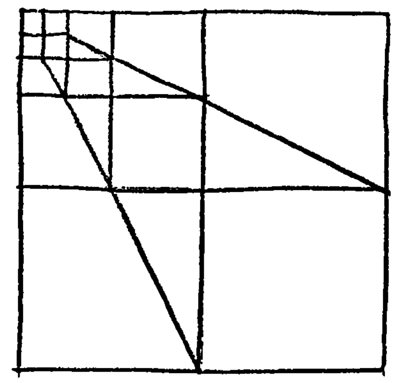


figura 4

Como se puede observar, en el modelo de la figura 3 sólo se utilizan elementos cuadrangulares, pero tiene el inconveniente de que algunos de estos elementos presentan problemas de convergencia debidos a la desproporción que hay entre sus lados. En el modelo de la figura 4 se soslaya este inconveniente mediante la introducción de elementos triangulares lo cual a su vez crea problemas de formulación al haber dos tipos de elementos.

Es evidente que en el modelo de la figura 1 todos estos inconvenientes desaparecen presentando además la ventaja de que todos sus elementos son cuadrados y el número de los mismos menor que en los otros dos modelos (16 elementos frente a 36 y 24 necesarios en los modelos 3 y 4 respectivamente). En él, los nudos señalados con una cruz (X) son comunes a 3 elementos: son nudos de vértice para los dos elementos menores y nudo intermedio para el elemento mayor.

la existencia de un nudo intermedio C en el lado AB del elemento I obliga a que la función del desplazamiento en él sea cuadrática, pues se cuenta con tres parámetros, u^C, u^A y u^B, lo cual conduciría a una incompatibilidad a lo largo de este lado AB, ya que la función del desplazamiento en los elementos II y III será lineal, tal como se observa en la figura 5. Para evitar esto, se impone la compatibilidad a lo largo del lado AB considerando lineal el desplazamiento en I presentando entonces un punto de discontinuidad en su derivada en el nudo intermedio C.

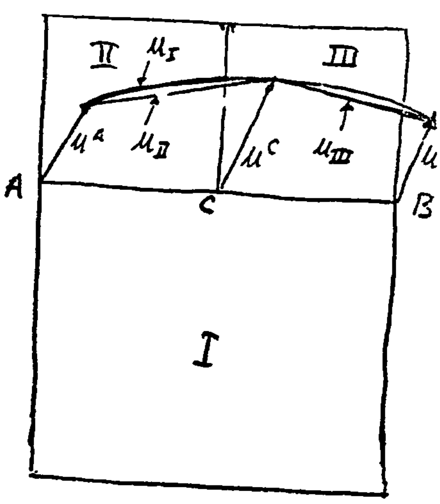


figura 5

La expresión del desplazamiento u a lo largo del lado AB puede ser dada en la forma:

$$u = \frac{1}{2}(1-\xi)\,u^A + \frac{1}{2}(1+\xi)\,u^B + (1-|\xi|)\,\Delta u^C \qquad [1]$$

siendo ξ la coordenada local a lo largo de AB (figura 6)

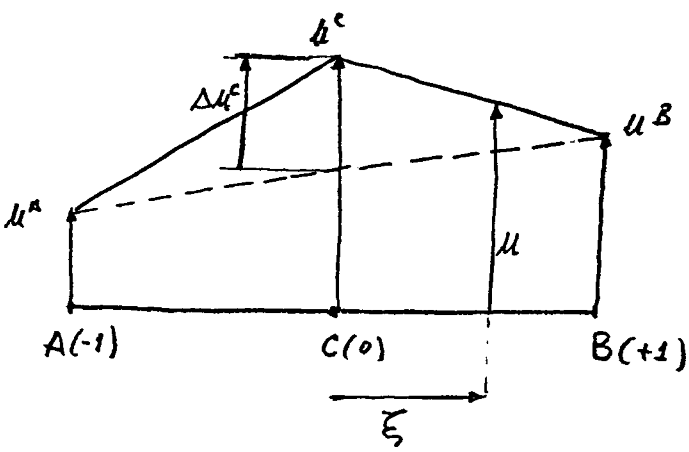


figura 6

Para $\xi = 0$ se ha de verificar.

$$u(0) = u^C = \frac{u^A + u^B}{2} + \Delta u^C$$

de donde

$$\Delta u^C = u^C - \frac{u^A + u^B}{2}$$

que sustituido en [1] da:

$$u = \frac{1}{2}(|\xi| - \xi)\, u^A + \frac{1}{2}(|\xi| + \xi)\, u^B + (1 - |\xi|)\, u^C$$

o bien:

$$\boxed{u = N^A u^A + N^B u^B + N^C u^C}$$

con

$$N^A = \frac{1}{2}(|\xi| - \xi)$$

$$N^B = \frac{1}{2}(|\xi| + \xi)$$

$$N^C = (1 - |\xi|)$$

Este procedimiento, establecido para un lado, puede ser aplicado al elemento completo tal como se indica a continuación:

Considérese el elemento de la figura 7, el cual tiene cuatro nudos de vértice, 1, 2, 3 y 4, y cuatro intermedios, 5, 6, 7 y 8. Obviamente, cualquier nudo intermedio introducirá una discontinuidad en la derivada del desplazamiento, si bien no es necesario que existan todos los nudos intermedios, pudiéndose formular un elemento con nudos de vértice exclusivamente, o con ellos y uno, dos, tres o cuatro nudos intermedios.

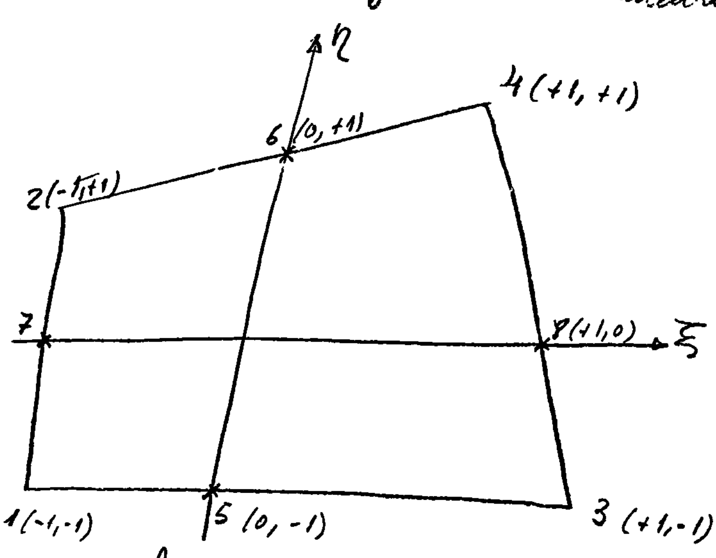


figura 7

El procedimiento a seguir es:

1º) Escribir las funciones de forma para los nudos de vértice como si los intermedios no existiesen

$$\bar{N}^i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$$

es decir:

$$\bar{N}^1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$\bar{N}^2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$\bar{N}^3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$\bar{N}^4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

2º) Escribir las funciones de forma correspondientes a los nudos intermedios considerando el desplazamiento en ellos como un incremento sobre el correspondiente a la variación lineal definida por los desplazamientos de los nudos de los vértices

$$N^5 = \frac{1}{2}(1-|\xi|)(1-\eta)$$

$$N^6 = \frac{1}{2}(1-|\xi|)(1+\eta)$$

$$N^7 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-|\eta|)$$

$$N^8 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-|\eta|)$$

Si cualquiera de los nudos intermedios no existiese las funciones de forma correspondientes serían nulas.

3º) Modificar las funciones de forma correspondientes a los nudos de vértice de forma que los desplazamientos en los nudos intermedios sean los totales en los mismos. Es decir, se tiene:

$$u = \bar{N}^1 u^1 + \bar{N}^2 u^2 + \bar{N}^3 u^3 + \bar{N}^4 u^4 + N^5 \Delta u^5 + N^6 \Delta u^6 + N^7 \Delta u^7 + N^8 \Delta u^8.$$

Se imponen las condiciones

$$u(0,-1) = u^5$$
$$u(0,+1) = u^6$$
$$u(-1,0) = u^7$$
$$u(+1,0) = u^8$$

obteniéndose las expresiones de Δu^5, Δu^6, Δu^7 y Δu^8 que sustituidas en [3] nos dan:

$$u = N^m u^m$$

con

$$N^1 = \bar{N}^1 - \tfrac{1}{2}(N^5 + N^7)$$
$$N^2 = \bar{N}^2 - \tfrac{1}{2}(N^6 + N^7)$$
$$N^3 = \bar{N}^3 - \tfrac{1}{2}(N^5 + N^8)$$
$$N^4 = \bar{N}^4 - \tfrac{1}{2}(N^6 + N^8)$$

Una vez obtenidas las funciones de forma, las ecuaciones de cambio de ejes y las de desplazamientos son respectivamente

$$X_i = N^m X_i^m$$

$$u_i = N^m u_i^m$$

donde el subíndice i ($i = 1, 2$) representa los ejes coordenados y m el número de nudos. La repetición de un sub o superíndice implica suma.

NOTA.- El método expuesto de introducción de nudos intermedios de transición y aplicado a elementos cuadrangulares con desplazamiento bilineal, es general y puede aplicarse a otros elementos, incluso de orden superior.

Ejercicio 3.9.

Determinar las funciones de forma del elemento monodimensional C^1 (viga recta a flexión) considerando:

a) dos nudos (figura E2.17a.)

b) tres nudos (figura E2.17b.).

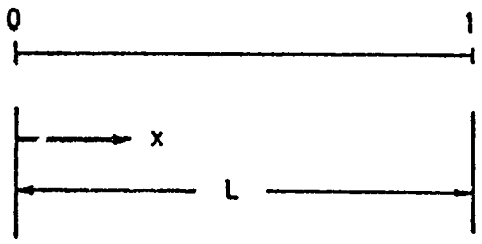


Fig. E2.17a

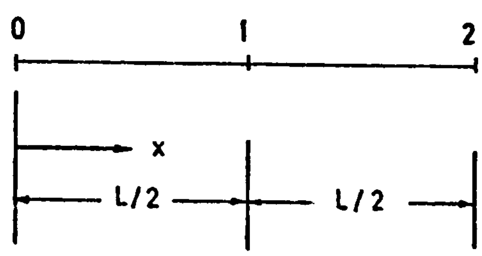


Fig. E2.17b

a) Los grados de libertad en cada nudo son en términos de desplazamientos: la flecha o función (w) y la derivada de dicha función o giro $(\frac{dw}{dx})$ particularizadas en el nudo.

Se tiene:

$$w(x)=(N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4)\begin{bmatrix} w_0 \\ \theta_0 \\ w_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

siendo

$$w_i = w(x)\Big|_{x=x_i} \qquad \text{y} \qquad \theta_i = \frac{dw(x)}{dx}\Big|_{x=x_i} \qquad (i=0,1)$$

con $x_0=0$ y $x_1=L.$

Se comprende que $N_1=N_1(x)$ tiene que cumplir las condiciones:

$$N_1(x_1)=1 \qquad N_2(x_1)=0 \qquad N_3(x_1)=0 \qquad N_4(x_1)=0$$

$$\frac{dN_1}{dx}\Big|_{x=x_0}=0 \qquad \frac{dN_2}{dx}\Big|_{x=x_0}=1 \qquad \frac{dN_3}{dx}\Big|_{x=x_0}=0 \qquad \frac{dN_4}{dx}\Big|_{x=x_0}=0$$

$$N_1(x_2)=0 \qquad N_2(x_2)=0 \qquad N_3(x_2)=1 \qquad N_4(x_2)=0$$

$$\frac{dN_1}{dx}\Big|_{x=x_1}=0 \qquad \frac{dN_2}{dx}\Big|_{x=x_1}=0 \qquad \frac{dN_3}{dx}\Big|_{x=x_1}=0 \qquad \frac{dN_4}{dx}\Big|_{x=x_1}=1$$

que permiten determinar las funciones de forma N (x) suponiendo que son funciones polinómicas cúbicas, es decir

$$N_i(x)= a_i x^3+b_i x^2+c_i x+d_i \qquad (i=1,2,3,4)$$

Resulta:

$$N_1= 1-3\xi^2+2\xi^3 \qquad N_2= L(1-2\xi+\xi^2)\xi$$

$$N_3= 3\xi^2-2\xi^3 \qquad N_4= L(\xi-1)\xi \qquad \text{con}\ \xi=\frac{x}{L}$$

Estas funciones de forma constituyen las funciones viga o polinomios hermíticos. Estos polinomios se definen del siguiente modo: (para m=1,2,3,...n):

$H_{mi}^{(n)}(x)$

es un polinomio de orden 2n-1, que toma el valor

$\frac{d^k H}{dx^K}=1$ para $k=m$ y $x=x_i$

$\frac{d^K H}{dx^K}=0$ para $k\neq m$ y cualquier $x=x_j$ $(j\neq i)$

o para $k=n$ y $x=x_i$

Se puede comprobar que

$N_1=H_{00}^{(1)}(x)$ $N_2=H_{10}^{(1)}(x)$

$N_3=H_{01}^{(1)}(x)$ $N_4=H_{11}^{(1)}(x)$

b) De un modo análogo se define:

$$w(x)=(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6)\begin{bmatrix} w_0 \\ \theta_0 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

con $x_0=0$ $x_1=\frac{L}{2}$ y $x_2=L$.

Se puede demostrar que las funciones de forma satisfacen a las condiciones siguientes:

$N_{2i+1}(x_i)=1$ $N_{2i+1}(x_j)=0$ $\frac{dN_{2i+1}}{dx}\Big|_{x=x_i \text{ o } x_j}=0$

$N_{2i}(x_i)=0$ (con $x=x_i$ ó x_j)

$$\frac{dN_{2i}}{dx}\Big|_{x=x_j}=0 \qquad \frac{dN_{2i}}{dx}\Big|_{x=x_i}=0 \qquad (i,j=0,1,2\ ;\ j\neq i)$$

Si se consideran polinomios quínticos, se obtiene:

$$N_1=(1+6\xi)(4\xi^4-12\xi^3+13\xi^2-6\xi+1)=-24\xi^5-68\xi^4+66\xi^3-23\xi^2+1$$

$$N_3= 16\xi^4-32\xi^3+16\xi^2$$

$$N_5=-24\xi^5+52\xi^4-34\xi^3+7\xi^2$$

$$N_2= L\xi(4\xi^4-12\xi^3+13\xi^2-6\xi+1)$$

$$N_4= L\xi(16\xi^4-40\xi^3+32\xi^2-8\xi)$$

$$N_6= L\xi(4\xi^4-8\xi^3+5\xi^2-\xi) \qquad \text{siendo} \quad \xi=\frac{x}{L}$$

Se comprueba que con la definición de polinomios hermíticos anteriores se puede escribir:

$$N_1=H_{00}^{(2)}(x), \qquad N_2=H_{10}^{(2)}(x)$$

$$N_3=H_{01}^{(2)}(x), \qquad N_4=H_{11}^{(2)}(x)$$

$$N_4=H_{02}^{(2)}(x) \qquad N_5=H_{12}^{(2)}(x)$$

Se puede demostrar la siguiente relación existente entre los polinomicos de interpolación de Lagrange y los hermíticos:

$$H_{0i}^{(n)}=\left\{1-2\ \frac{d}{dx}\{p_i^n(x)\}_{x=x_i}(x-x_i)\right\}\{p_i^n(x)\}^2$$

$$H_{1i}^{(n)}= (x-x_i)\{p_i^n\ (x)\}^2$$

Observación:

Es más conveniente utilizar en el análisis mediante el método de los elementos finitos sistemas de coordenadas con origen en el punto medio del elemento y normalizado a longitud 2, es decir, en el caso de dos nudos $\xi_1=-1$ y $\xi_2=1$. En el caso de tres nudos $\xi_1=-1$, $\xi_2=0$ y $\xi_3=1$. De esta forma se puede proceder a la integración numérica de la matriz de rígidez) las funciones de forma son más simples. Se obtiene entonces:

Caso a):

$$N_1= (2\xi-1)^2(\xi+1)$$

$$N_2= (\xi-1)(\xi+1)L$$

$$N_3= (2\xi+1)(1-\xi)$$

$$N_4= (\xi+1)(\xi-1)L$$

Caso b):

$$N_1= \frac{1}{4}(1-\xi)^2\xi^2(4+3\xi)$$

$$N_2= \frac{1}{4}(1-\xi)^2\xi^2(1+\xi)$$

$$N_3=(1-\xi^2)^2$$

$$N_4=(1-\xi^2)\xi$$

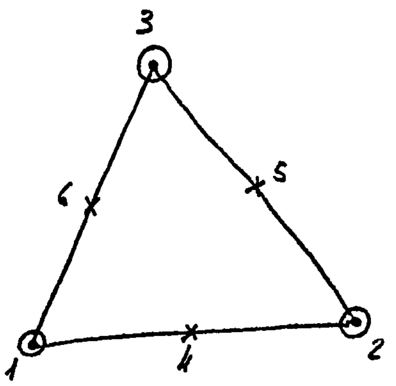
$$N_5= \frac{1}{4}(1+\xi)^2\xi^2(4-3\xi)$$

$$N_6=-\frac{1}{4}(1+\xi)\xi^2(1-\xi)$$

Ejercicio 3.10

Obtención las funciones de forma del hipuelemento triangular de flexión de orden 5º

Un polinomio completo de orden 5 tiene 21 coeficientes. Se necesitarán por lo tanto 21 parámetros o grados de libertad, que son los indicados en la figura 1



$\odot \quad w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

$\times \quad \dfrac{\partial w}{\partial n}$

figura 1

Utilizando coordenadas triangulares o de área, L_1, L_2, L_3, la variación de la flecha se puede expresar de la forma:

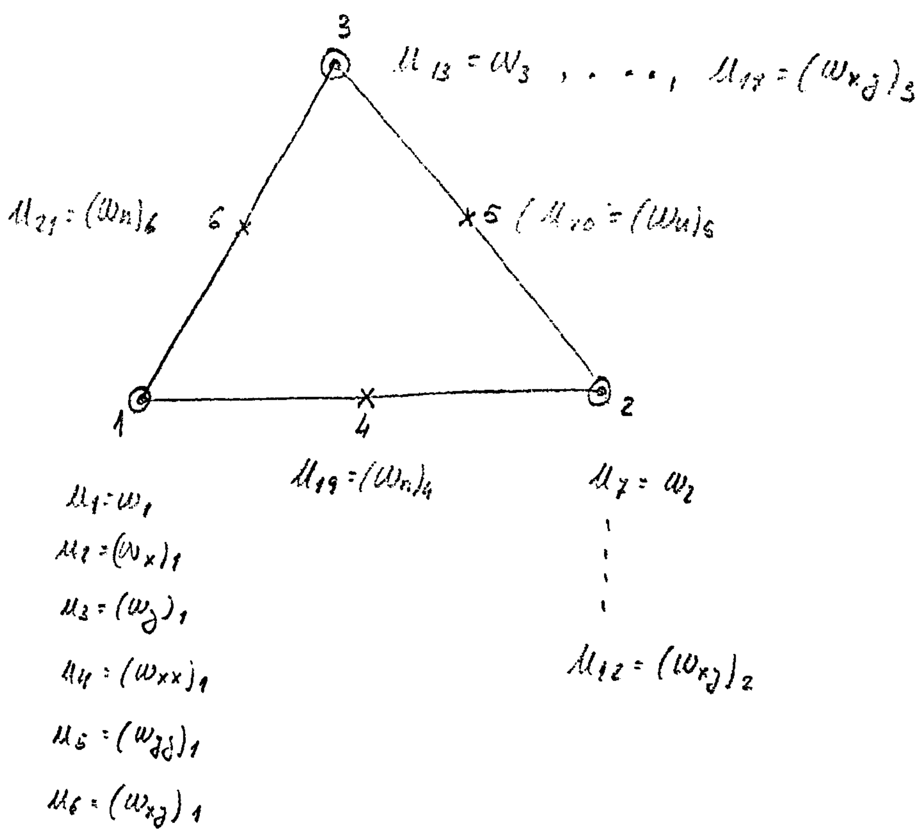
$$w = \sum^5 \sum^5 \sum^5 \alpha_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k \qquad [1]$$

extendiéndose los sumatorios a los índices i, j, k que cumplen $i + j + k = 5$

Los 21 coeficientes α_{ijk} serán los indicados en la siguiente tabla, en la que sólo se dan los subíndices:

i	j	k	i	j	k	i	j	k
5	0	0	0	5	0	0	0	5
4	1	0	0	4	1	1	0	4
4	0	1	1	4	0	0	1	4
3	2	0	0	3	2	2	0	3
3	1	1	1	3	1	1	1	3
3	0	2	2	3	0	0	2	3
1	2	2	2	1	2	2	2	1

Sea $\underline{U}$ el vector cuyas componentes representan los valores de los 21 grados de libertad básicos del elemento, siendo estos



Utilizando la expresión [1], se pueden expresar las 21 condiciones básicas u_i en función de los 21 coeficientes α_{ijk} mediante las siguientes relaciones:

$$u_1 = f_1(\alpha_{ijk})$$
$$u_2 = f_2(\alpha_{ijk})$$
$$\vdots$$
$$u_{21} = f_{21}(\alpha_{ijk})$$

o bien:

$$\underline{U} = \underline{C} \times \underline{\alpha}$$

donde $\underline{U}$ es el vector (21×1) ya descrito, $\underline{C}$ es una matriz (21×21) cuyos términos son en general no numéricos y $\underline{\alpha}$ es un vector (21×1) cuyas componentes son los 21 coeficientes α_{ijk}.

Se tiene:

$$\underline{\alpha} = \underline{C}^{-1} \times \underline{U} \qquad [2]$$

Por otra parte la relación [1] puede expresarse en la forma:

$$w = \underline{L} \times \underline{\alpha} \qquad [3]$$

donde $\underline{L}$ es un vector (1×21) cuyas componentes son los 21 términos potenciales $L_1^i L_2^j L_3^k$

Sustituyendo [2] en [3] resulta:

$$w = \underset{1\times 21}{\underline{L}} \cdot \underset{21\times 21}{\underline{C}^{-1}} \cdot \underset{21\times 1}{\underline{U}} = \underset{1\times 21}{\underline{N}} \times \underset{21\times 1}{\underline{U}}$$

donde $\underline{N} = \underline{L} \cdot \underline{C}^{-1}$

es el vector cuyas componentes son las funciones de forma N_i asociadas a los grados de libertad u_i:

$$\underline{N} = [N_1, N_2, \ldots, N_{21}]$$

La mayor dificultad estriba en la inversión de la matriz $\underline{C}$ cuyos términos son relaciones geométricas del elemento y en general no numéricas. Su inversión se realiza resolviendo el sistema $\underline{U} = \underline{C} \times \underline{\alpha}$, por bloques, ya que la matriz $\underline{C}$ está desacoplada por bloques.

Las funciones de forma que resultan son:

$$N_1 = L_1^5 + 5L_1^4(L_2+L_3) + 10L_1^3(L_2+L_3)^2 + 30L_1^2L_2L_3(\mu_3L_2 + \lambda_2L_3)$$

$$N_2 = L_1^4(a_3L_2 - a_2L_3) + 4L_1^3\left[a_3L_2^2 + (a_3-a_2)L_2L_3 - a_2L_3^2\right] +$$
$$+ L_1^2L_2L_3\left[(5a_1 - 7\lambda_2a_2)L_3 - (5a_2 - 7\mu_3a_3)L_2\right]$$

$$N_3 = L_1^4(b_2L_3 - b_3L_2) + 4L_1^3\left[b_2L_3^2 + (b_2-b_3)L_2L_3 - b_2L_2^2\right] +$$
$$+ L_1^2L_2L_3\left[(5b_2 - 7\mu_3b_3)L_2 - (5b_1 - 7\lambda_2b_2)L_3\right]$$

$$N_4 = \frac{1}{2}\left\{L_1^3(a_3L_2 - a_2L_3)^2 + L_1^2L_2L_3\left[((2+\mu_3)a_3^2 + a_2a_3)L_2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + ((2+\lambda_2)a_2^2 + a_2a_3)L_3\right]\right\}$$

$$N_5 = \frac{1}{2}\left\{L_1^3(b_3L_2 - b_2L_3)^2 + L_1^2L_2L_3\left[((2+\mu_3)b_3^2 + b_2b_3)L_2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + ((2+\lambda_2)b_2^2 + b_2b_3)L_3\right]\right\}$$

$$N_6 = -L_1^3\left[a_3b_3L_2^2 - (a_3b_2 + a_2b_3)L_2L_3 + a_2b_2L_3^2\right] +$$

$$+ L_1^2L_2L_3\left[(a_3b_1 + a_1b_3 - \mu_3a_3b_3)L_2 + (a_2b_1 + a_1b_2 - \lambda_2a_2b_2)L_3\right]$$

$$N_{19} = 16\, h_3' \cdot L_1^2L_2^2L_3$$

Las funciones de forma N_7 a N_{18} correspondientes a los grados de libertad en los vértices 2 y 3, se deducen por permutación circular de los subíndices $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$

Análogamente, las N_{20} y N_{21} asociadas a los grados de libertad de los lados 2-3 y 3-1, se deducen de N_{19}, por permutacion circular

Los valores de las constantes $a_i, b_i, h_i, \lambda_i, \mu_i$, de caracter geométrico, se definen en el apendice que sigue

En este apéndice se definen y describen las relaciones geométricas de los elementos desarrollados en esta tesis, algunas de las cuales no se deducen por ser de corriente utilización en la formulación de elementos triangulares.

A.1 COORDENADAS TRIANGULARES

Un triángulo de vértices i (i=1,2,3), cuyas coordenadas referidas a un sistema cartesiano son respectivamente (x_i,y_i), puede servir para definir mediante un sistema de coordenadas naturales del triángulo, también llamadas triangulares o de área (L_1,L_2,L_3), cualquier punto P(x,y) del plano.

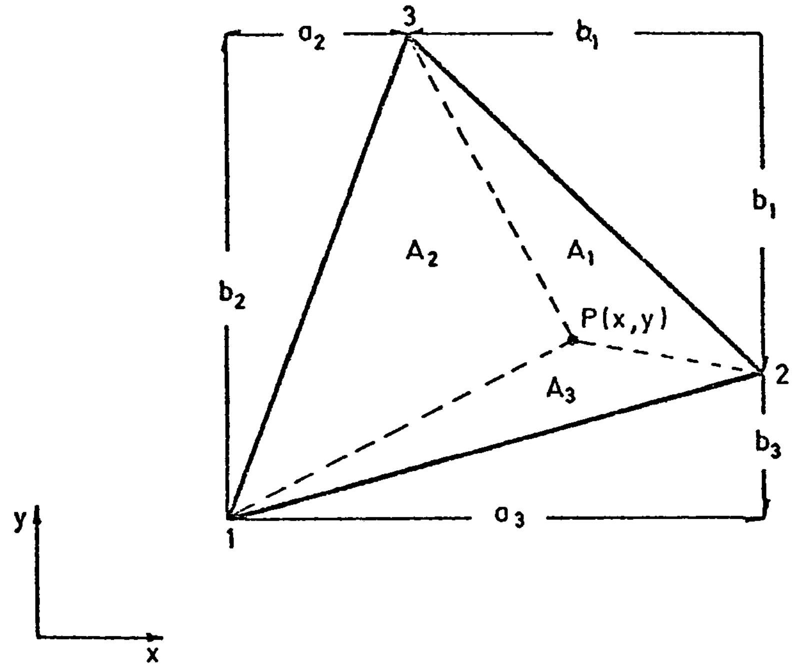


Fig. A.1

La definición de L_i es (fig. A.1) como sigue:

$$L_1 = \frac{\text{Area (P23)}}{\text{Area (123)}} = \frac{A_1}{A} \qquad \text{(A-1)}$$

Los valores L_2 y L_3 se definen análogamente, permutando cíclicamente los índices $\overleftarrow{1 \to 2 \to 3}$ ó en general $\overleftarrow{i \to j \to k}$, puesto que $A = A_1 + A_2 + A_3$ se deduce que L_1, L_2, L_3 no son independientes, ya que cumplen la condición:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \qquad \text{(A-2)}$$

Las fórmulas de paso de coordenadas triangulares (L_1, L_2, L_3) a cartesianas, son en forma matricial:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(A-3)}$$

Las fórmulas inversas son:

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(A-4)}$$

con

$$a_i = x_k - x_j \quad , \quad b_i = y_j - y_k \quad , \quad c_i = y_k x_j - x_k y_j \qquad \text{(A-5)}$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{área del triángulo } \overline{123} \qquad \text{(A-6)}$$

Otras relaciones geométricas de las que se hace uso en esta tesis, se deducen de la figura A.2:

donde l_i es la longitud del lado opuesto al vértice i (i=1,2,3)

$$l_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \qquad \text{(A-7)}$$

h_i es la altura del triángulo, normal al lado opuesto al vértice i-simo

$$h_i = \frac{2A}{l_i} \qquad \text{(A-8)}$$

$$S_i = a_j b_k + a_k b_j \qquad \text{(A-9)}$$

Los valores de r_i indicados en la figura A.2, son:

$$r_i = -(a_j a_k + b_j b_k)/l_i \qquad \text{(A-10)}$$

se denomina

$$\lambda_i = r_i/l_i \quad , \quad \mu_i = 1 - \lambda_i$$

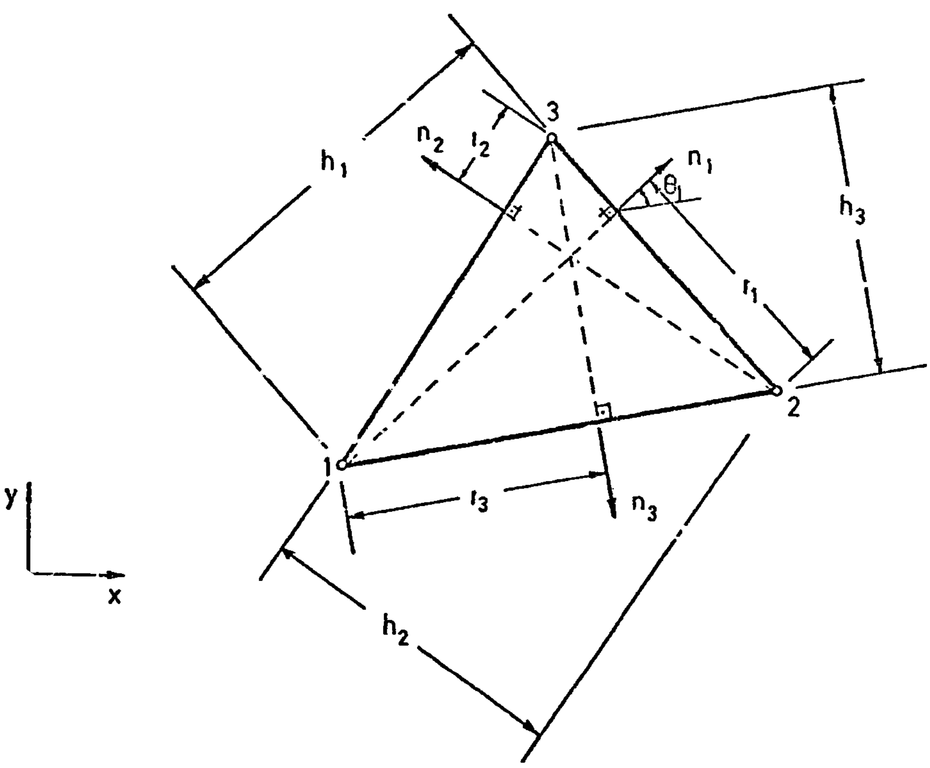


Fig. A . 2

A.2 DERIVADAS E INTEGRALES

Las fórmulas de paso de derivadas, se obtienen teniendo en cuenta, que de la relación (A-4), se deduce que:

$$\frac{dL_i}{dx} = \frac{b_i}{2A} \quad ,, \quad \frac{dL_i}{dy} = \frac{a_i}{2A}$$

con lo que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial F}{\partial L_i} \quad ,, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial F}{\partial L_i} \qquad \text{(A-12)}$$

análogamente para las derivadas segundas, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{(2A)^2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_i b_j \frac{\partial^2 F}{\partial L_i \partial L_j}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{(2A)^2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i a_j \frac{\partial^2 F}{\partial L_i \partial L_j} \qquad \text{(A-13)}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(2A)^2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i b_j \frac{\partial^2 F}{\partial L_i \partial L_j}$$

o formalmente

$$\frac{\partial^{n+m} F}{\partial x^n y_y^m} = \left(\sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial F}{\partial L_i} \right)^n \left(\sum_{j=1}^{3} a_i \frac{\partial F}{\partial L_j} \right)^m \qquad \text{(A-14)}$$

con el convenio

$$\left(\frac{\partial F}{\partial L_i}\right)^r \left(\frac{\partial F}{\partial L_i}\right)^s = \frac{\partial^{r+s} F}{\partial L_i^r \partial L_j^s}$$

La expresión de la derivada normal a un lado, por ejemplo el 2-3, en función de las derivadas respecto a las coordenadas triangulares, es observando la figura A.2:

$$\frac{\partial F}{\partial n_1} = \frac{\partial F}{\partial x} \cos \theta_1 + \frac{\partial F}{\partial y} \operatorname{sen} \theta_1$$

y mediante las relaciones (A-10) y (A-12) se llega a la relación dada por Felippa (Ref. 78):

$$\frac{\partial F}{\partial n_1} = \frac{1}{2A} \left(\frac{\partial F}{\partial L_1} l_1 + \frac{\partial F}{\partial L_2}(r_1 - l_1) - \frac{\partial F}{\partial L_3} r_1\right)$$

y utilizando las relaciones (A-8) y (A-11), se puede poner así:

$$\frac{\partial F}{\partial n_1} = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial F}{\partial L_1} - \mu_1 \frac{\partial F}{\partial L_2} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial L_3}\right) \qquad \text{(A-15)}$$

análogamente se obtiene para los otros lados, quedando finalmente

$$\left|\begin{matrix} h_1 \dfrac{\partial F}{\partial n_1} \\ h_2 \dfrac{\partial F}{\partial n_2} \\ h_3 \dfrac{\partial F}{\partial n_3} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 1 & -\mu_1 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & 1 & -\mu_2 \\ -\mu_3 & -\lambda_3 & 1 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial F}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial L_2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial L_3} \end{matrix}\right| \qquad \text{(A-16)}$$

En esta tesis, las funciones que se integran son de tipo polinomio, por lo que se puede usar la siguiente fórmula para las integrales extendidas al dominio de integración de área A

$$I = \iint_A L_1^a L_2^b L_3^c \, dA = 2A \frac{a!\, b!\, c!}{(a+b+c+2)!} \quad \text{con } a,b,c \geq 0 \qquad \text{(A-17)}$$

A.3 VALORES DE LAS FUNCIONES POLINOMICAS DE SUS DERIVADAS

La expresión general de una función de interpolación polinómica ϕ de grado 7, es:

$$\phi = \Sigma\Sigma\Sigma \; \alpha_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k \quad \text{con } (i+j+k=7) \qquad \text{(A-18)}$$

siendo cada coeficiente α_{ijk} el asociado a cada uno de los 36 términos potenciales $L_1^i L_2^j L_3^k$

El valor que toma esta función en el vértice 1 del triángulo dado por las coordenadas triangulares (1,0,0), será debido a los términos que no contengan L_2 y L_3 pués son los únicos que no se anulan en dicho punto, teniendo:

$$\phi\,(1,0,0) = \alpha_{700}$$

análogamente en los otros dos vértices 2 y 3, se tendrá

$$\phi\,(0,1,0) = \alpha_{070} \quad , \quad \phi\,(0,0,1) = \alpha_{007}$$

Ejercicio 4.1

Una barra sometida a extensión de longitud l y sección variable, $A(X)$, dada por:

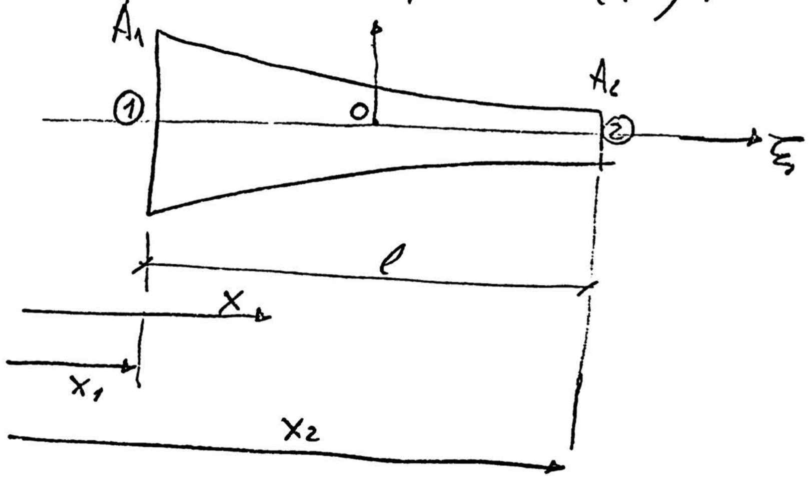
$$A(X) = A(1+\mu)^{\frac{1+\xi}{2}}(1-\mu)^{\frac{1-\xi}{2}}$$

con $\xi = 2\dfrac{X-X_0}{l}$

$$X_0 = \frac{X_1+X_2}{2}$$

$$\mu = \frac{A_2-A_1}{A_2+A_1}$$

$$A = \frac{A_1+A_2}{2}$$



Se pide:

a) Determinar la matriz de rigidez

b) Cargas equivalentes a una acción uniforme extendida a toda la luz y de intensidad q

mediante los siguientes métodos:

1) Exacto

2) elementos finitos con funciones de forma lineales. Integración exacta y aproximada de Gauss (1 punto y dos puntos).

3) elementos finitos con tres nodos y funciones de interpolación parabólicas. Integración exacta y de Gauss (1 punto y dos puntos). Eliminar por condensación estática el nodo intermedio. ¿El resultado es independiente del nodo intermedio?

4) elementos finitos con dos barras de dos nodos con funciones de forma lineales y eliminando por condensación estática el nodo intermedio.

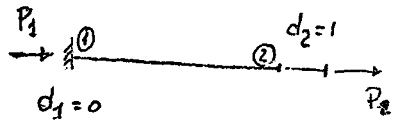
El resultado obtenido compárese con el deducido en el apartado anterior.

1. METODO EXACTO

1.a) Se tiene:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Haciendo:



ESTADO I

$d_1 = 0$; $d_2 = 1$, se tiene

$$K_{22} = P_2$$
$$K_{12} = P_1$$

Es decir, K_{22} es la fuerza que aparece en el nudo ② si se da un desplazamiento tal que $d_1 = 0$; $d_2 = 1$, K_{12} es la fuerza que en estas mismas circunstancias aparece en ① Por equilibrio, se ha de cumplir $K_{12} = -K_{22}$

Análogamente:

ESTADO II

$$K_{11} = P_1$$
$$K_{21} = P_2$$

K_{11} es la fuerza que aparece en ① al dar el desplazamiento $d_1 = 1$; $d_2 = 0$, y K_{21} la que aparece en ②. Por equilibrio, $K_{21} = -K_{11}$ y aplicando el teorema de la reciprocidad a los dos estados descritos, se tiene:

$$K_{12} = K_{21}$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez es de la forma.

$$\underline{K} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando el estado I con $P_2 = k$, se tiene:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{k}{E\,A(s)} dx = d_2 = 1 \qquad , \text{ o bien}$$

$$K\,\frac{\ell}{2E}\int_{-1}^{1}\frac{1}{A(\xi)}\,d\xi = 1 \qquad [1]$$

Se tiene: $A(\xi) = A\cdot(1+\mu)^{\frac{1+\xi}{2}}\,(1-\mu)^{\frac{1-\xi}{2}} = A\,(1-\mu^2)^{1/2}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2}$

$$\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{A(\xi)} = \frac{1}{A(1-\mu^2)^{1/2}}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\xi/2}d\xi = \frac{1}{A(1-\mu^2)^{1/2}}\cdot\frac{2}{\ln\frac{1-\mu}{1+\mu}}\cdot\left.\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\xi/2}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{\lambda}{A}\cdot\frac{1}{(1-\mu^2)^{1/2}}\left[\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{1/2} - \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{1/2}\right] = \frac{\lambda}{A}\left(\frac{1}{1+\mu} - \frac{1}{1-\mu}\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{A}\,\frac{-2\mu}{1-\mu^2} \qquad \text{siendo} \qquad \lambda = \frac{2}{\ln\frac{1-\mu}{1+\mu}}$$

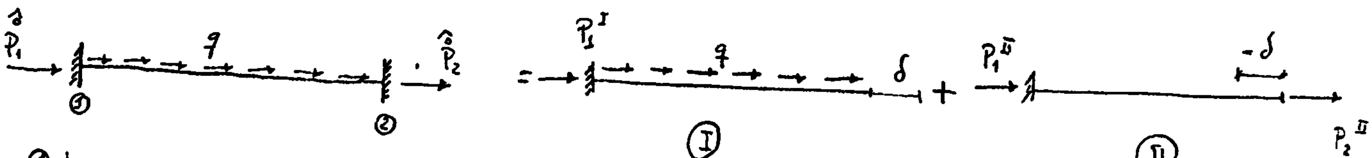
Sustituyendo en [1] resulta:

$$-K\,\frac{\ell}{EA}\cdot\frac{\lambda\mu}{1-\mu^2} = 1$$

$$K = \frac{EA}{\ell}\,\frac{\mu^2-1}{\lambda\mu} \quad , \quad \text{con lo cual}$$

$$\boxed{\underline{K} = \frac{EA}{\ell}\,\frac{\mu^2-1}{\lambda\mu}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}}$$

1.b) Cargas equivalentes



Obviamente:

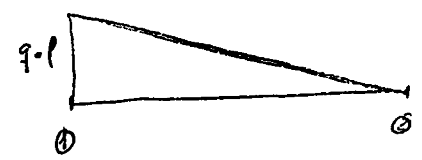
$P_1^I = -q\cdot\ell \quad ; \quad P_1^{II} = -P_2^{II}$

$\hat{P}_1 = P_1^I + P_1^{II} = P_1^I - P_2^{II}$

$\hat{P}_2 = P_2^{II} = -K\delta$

La única incógnita que se tiene es δ, la cual se obtiene a partir del estado I.

En el, la ley de axiles es:



$$N = \frac{ql}{2}(1-\xi)$$

$$\delta = \int_{x_1}^{x_2} \frac{N\,dx}{EA(\xi)} = \frac{l}{2}\,\frac{ql}{2E}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\xi)}{A(\xi)}\,d\xi$$

$$\delta = \frac{ql^2}{4EA}\,\frac{1}{(1-\mu^2)^{1/2}}\int_{-1}^{1}(1-\xi)\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\xi/2} d\xi \quad , \text{ de donde}$$

$$\delta = \frac{ql^2}{2EA}\,\frac{\lambda(1+\mu+\lambda\mu)}{\mu^2-1}$$

Luego:

$$\hat{P}_2 = -\frac{ql}{2}\,\frac{(1+\mu+\mu\lambda)}{\mu}$$

$$\hat{P}_1 = -ql + \frac{ql}{2}\,\frac{(1+\mu+\mu\lambda)}{\mu} = -\frac{ql}{2}\,\frac{(-1+\mu-\mu\lambda)}{\mu}$$

Las cargas equivalentes serán las opuestas a las reacciones, es decir:

$$P_1 = \frac{ql}{2}\,\frac{(\mu+1+\mu\lambda)}{\mu}$$

$$P_2 = \frac{ql}{2}\,\frac{(\mu-1-\mu\lambda)}{\mu}$$

2. ELEMENTOS FINITOS. DOS NUDOS

2.a) Matriz de rigidez

Funciones de forma lineales: $N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$; $N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$

$$u = [N_1 , N_2]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underline{N}\,\underline{d}$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = [N_{1,x} \quad N_{2,x}]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \left[-\frac{1}{l} , \frac{1}{l}\right]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [B_1 , B_2]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underline{B}\,\underline{d}$$

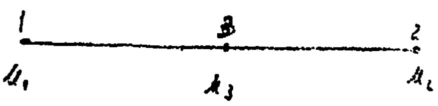
$$\underline{K} = \int_{x_1}^{x_2} \underline{B}^T \underline{D}\,\underline{B}\,dx = \frac{l}{2}\int_{-1}^{1} EA(\xi)\,\underline{B}^T\underline{B}\,d\xi = \frac{EA}{2l}(1-\mu^2)^{1/2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2} d\xi$$

Dado que las funciones de forma son lineales el resultado de la integración con 1 ó 2 puntos de Gauss es igual al exacto.

3. ELEMENTOS FINITOS. TRES NUDOS

3.a) Matriz de rigidez

Se considerarán los grados de libertad:



$$N_1 = \tfrac{1}{2}\,\xi(\xi-1)$$

$$N_2 = \tfrac{1}{2}\,\xi(\xi+1)$$

$$N_3 = 1-\xi^2$$

$$\underline{B} = \frac{d}{dx}\underline{N} = [N_{1,x} \quad N_{2,x} \quad N_{3,x}] = \frac{1}{l}\left[2\xi-1 \,,\; 2\xi+1 \,,\; -4\xi\right]$$

$$\underline{K} = \int_{x_1}^{x_2} \underline{B}^T \underline{D}\,\underline{B}\, dx = \frac{l}{2}\int_{-1}^{1} EA(\xi)\, \underline{B}^T \underline{B}\, d\xi$$

$$\underline{K} = \frac{EA}{2l}(1-\mu^2)^{1/2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2}\begin{bmatrix}(2\xi-1)^2 & 4\xi^2-1 & -4\xi(2\xi-1)\\ 4\xi^2-1 & (2\xi+1)^2 & -4\xi(2\xi+1)\\ -4\xi(2\xi-1) & -4\xi(2\xi+1) & 16\xi^2\end{bmatrix} d\xi$$

<u>Integración exacta</u>

Todas estas integrales son del tipo:

$$I_n = (1-\mu^2)^{1/2}\int_{-1}^{1}\xi^n\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2} d\xi$$

que se resuelve por partes con:

$$u = \xi^n \;;\; du = n\,\xi^{n-1}$$

$$\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2} d\xi = dv \;;\; v = \beta\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2} \;;\; \beta = \frac{2}{\ln\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)}$$

$$I_n = (1-\mu^2)^{1/2}\left\{\left[\beta\,\xi^n\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2}\right]_{-1}^{1} - n\beta\int_{-1}^{1}\xi^{n-1}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2} d\xi\right\}$$

$$\boxed{I_n = \beta\left[(1+\mu) - (-1)^n(1-\mu) - n\,I_{n-1}\right]} \quad ; \text{ con } \boxed{I_0 = 2\beta\mu}$$

Integración con un punto de Gauss

$P_1 = 0$

$P_2 = 0$

$P_3 = 2ql$

Integración con dos puntos de Gauss

$P_1 = \frac{ql}{6}$

$P_2 = \frac{ql}{6}$

$P_3 = \frac{2ql}{3}$

CONDENSACION ESTATICA

Se tiene:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Despejando u_3 en la tercera de estas ecuaciones:

$$u_3 = \frac{P_3}{K_{33}} - \frac{K_{31}}{K_{33}} u_1 - \frac{K_{32}}{K_{33}} u_2$$

y entrando con este valor en las dos primeras:

$$P_1 - \frac{K_{13}}{K_{33}} P_3 = \left(K_{11} - \frac{K_{13}^2}{K_{33}} \right) u_1 + \left(K_{12} - \frac{K_{13} K_{32}}{K_{33}} \right) u_2$$

$$P_2 - \frac{K_{23}}{K_{33}} P_3 = \left(K_{21} - \frac{K_{23} K_{31}}{K_{33}} \right) u_1 + \left(K_{22} - \frac{K_{23}^2}{K_{33}} \right) u_2$$

o lo que es lo mismo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_1 - \frac{K_{13}}{K_{33}} P_3 \\ P_2 - \frac{K_{23}}{K_{33}} P_3 \end{bmatrix}}_{\underline{P}^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} - \frac{K_{13}^2}{K_{33}} & K_{12} - \frac{K_{13} K_{32}}{K_{33}} \\ K_{21} - \frac{K_{23} K_{31}}{K_{33}} & K_{22} - \frac{K_{23}^2}{K_{33}} \end{bmatrix}}_{\underline{K}^*} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\underline{d}^*}$$

Sustituyendo para cada caso, se tiene:

<u>Integración exacta</u>

$$\underline{K} = \frac{EA}{2l} \cdot \frac{I_0 I_2 - I_1^2}{I_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

o lo que es lo mismo

$$\boxed{\underline{K} = \frac{EA}{l} \, \frac{\beta(\mu^2 + \beta^2 \mu^2 - 1)}{\mu + 2\beta^2 \mu - 2\beta} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$P_1^* = \frac{ql}{6} + \frac{2I_2 - I_1}{4 I_2} \cdot \frac{2ql}{3} = \frac{ql}{6} \, \frac{3I_2 - I_1}{I_2}$$

$$P_2^* = \frac{ql}{6} + \frac{2I_2 + I_1}{4 I_2} \cdot \frac{2ql}{3} = \frac{ql}{6} \, \frac{3I_2 + I_1}{I_2}$$

<u>Integración con un punto de Gauss</u>

$$\boxed{\underline{K}^* = \frac{EA}{l} (1 - \mu^2)^{1/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

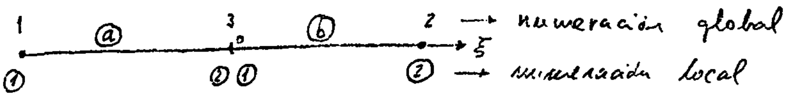
$$P_1^* = ql$$

$$P_2^* = ql$$

<u>Integración con dos puntos de Gauss</u>

Resultan las mismas expresiones que para el caso de integración exacta, pero con las I_n'

ELEMENTOS FINITOS. DOS BARRAS DE DOS NUDOS



4.a) Matriz de rigidez

Elemento (a)

$$N_1 = -\xi$$

$$N_2 = 1+\xi$$

$$\underline{B} = \frac{2}{l}\left[-1 \quad 1\right]$$

$$\underline{K}^a = \frac{2EA}{l}(1-\mu^2)^{1/2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\int_{-1}^{0}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2} d\xi$$

$$\underline{K}^a = \frac{2EA}{l}\beta\left[(1-\mu^2)^{1/2} - (1-\mu)\right]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento (b)

$$N_1 = 1-\xi \qquad \underline{B} = \frac{2}{l}\left[-1, \ 1\right]$$

$$N_2 = \xi$$

$$\underline{K}^b = \frac{2EA}{l}(1-\mu^2)^{1/2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\int_{0}^{1}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2} d\xi$$

$$\underline{K}^b = \frac{2EA}{l}\beta\left[1+\mu - (1-\mu^2)^{1/2}\right]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ensamblando se tiene

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^a & K_{12}^a & 0 \\ K_{21}^a & K_{22}^a + K_{11}^b & K_{12}^b \\ 0 & K_{21}^b & K_{22}^b \end{bmatrix} = \frac{2EA}{l}\beta\begin{bmatrix} \alpha & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 2\mu & -\gamma \\ 0 & -\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

siendo $\alpha = (1-\mu^2)^{1/2} - (1-\mu)$

$\gamma = 1+\mu - (1-\mu^2)^{1/2}$

ELIMINACION DE u_3

La fila: $P_3 = \frac{2EA}{l}\beta(-\alpha u_1 + 2\mu u_3 - \gamma u_2)$

$$u_3 = \frac{l}{4EA\beta\mu}P_3 + \frac{\alpha}{2\mu}u_1 + \frac{\gamma}{2\mu}u_2$$

Por otra parte

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{2EA}{l}\beta\,[\alpha u_1 - \alpha u_3] \\ P_2 &= \frac{2EA}{l}\beta\,[-\gamma u_3 + \gamma u_2] \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} -\left(P_1 + \frac{\alpha}{2\mu}P_3\right) &= \left[\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2\mu}\right)u_1 - \frac{\alpha\gamma}{2\mu}u_2\right]\frac{2EA}{l}\beta \\ \left(P_2 + \frac{\gamma}{2\mu}P_3\right) &= \left[-\frac{\alpha\gamma}{2\mu}u_1 + \gamma\left(1-\frac{\gamma}{2\mu}\right)u_2\right]\frac{2EA}{l}\beta \end{aligned}$$

Es decir:

$$\underline{K}^* = \frac{2EA}{l}\beta \begin{bmatrix} \alpha\left(1-\frac{\alpha}{2\mu}\right) & -\frac{\alpha\gamma}{2\mu} \\ -\frac{\alpha\gamma}{2\mu} & \gamma\left(1-\frac{\gamma}{2\mu}\right) \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}^* = \begin{bmatrix} P_1 + \frac{\alpha}{2\mu}P_3 \\ P_2 + \frac{\gamma}{2\mu}P_3 \end{bmatrix}$$

прислано амфма.

Ejercicio 4.2

Se tiene una barra sometida a extensión de longitud l y sección variable $A(\xi)$ dada por

$$A(\xi) = A\,(1+\mu)^{\frac{1+\xi}{2}}\,(1-\mu)^{\frac{1-\xi}{2}}$$

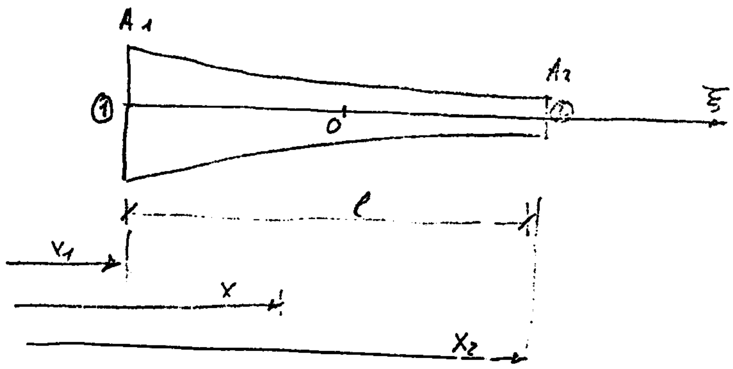
, con

$$\xi = 2\,\frac{x-x_0}{l}$$

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$$

$$\mu = \frac{A_2-A_1}{A_2+A_1}$$

$$A = \frac{A_1+A_2}{2}$$



en la que se consideran los siguientes grados de libertad:

Se pide obtener la matriz de rigidez de la misma y la expresión del vector de cargas consistentes tras la eliminación por condensación estática de los grados de libertad $u_{,x1}$ y $u_{,x2}$

Se considerará:

$$u = [\,N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\,] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_{,x1} \\ u_{,x2} \end{bmatrix} = \underline{N}\ \underline{d}$$

Siendo los N_i polinomios hermíticos de tercer grado:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{4}(2+\xi)(\xi-1)^2$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{4}(2-\xi)(\xi-1)^2$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{4}(\xi-1)(\xi^2-1)$$

$$N_4(\xi) = \frac{1}{4}(\xi+1)(\xi^2-1)$$

Dado que

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = [\,N_{1,x} \quad N_{2,x} \quad N_{3,x} \quad N_{4,x}\,]\,\underline{d} = \underline{B}\ \underline{d}$$

se tiene

$$B_i = N_{i,x} = \frac{dN_i}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{\ell}\,\frac{dN_i}{d\xi} \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4$$, con lo cual

$$\underline{B}^T = \frac{1}{2\ell}\begin{bmatrix} 3(\xi^2-1) \\ -3(\xi^2-1) \\ 3\xi^2-2\xi-1 \\ 3\xi^2+2\xi-1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [1]$$

La matriz de rigidez será:

$$\underline{K} = \int_{x_1}^{x_2} EA\,\underline{B}^T\cdot\underline{B}\,dx = \frac{E\ell}{2}\int_{-1}^{1} A\,\underline{B}^T\underline{B}\,d\xi$$, o bien

$$K_{ij} = \frac{E\ell}{2}\int_{-1}^{1} A\,B_i\,B_j\,d\xi \quad ; [2]$$

Por otra parte:

$$A(\xi) = A(1+\mu)^{\frac{1+\xi}{2}}(1-\mu)^{\frac{1-\xi}{2}} = A(1+\mu)^{1/2}\cdot(1-\mu)^{1/2}\cdot(1+\mu)^{\xi/2}\cdot(1-\mu)^{-\xi/2}$$

de donde:

$$A(\xi) = A(1-\mu^2)^{1/2}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2}$$

Si se consideran las expresiones [1] y [2] se observa que los términos de la matriz de rigidez, K_{ij}, van a ser combinaciones lineales de integrales del tipo:

$$I_n = (1-\mu^2)^{1/2}\int_{-1}^{1}\xi^n\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2}d\xi$$

Resolviendo por partes:

$$u = \xi^n \quad ; \quad du = n\,\xi^{n-1}$$

$$dv = (1-\mu^2)^{1/2}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2} \quad ; \quad v = \lambda\,(1-\mu^2)^{1/2}\times\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2}$$

$$\text{con} \quad \lambda = \frac{2}{\ln\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)}$$

Se tiene:

$$I_n = \lambda\,(1-\mu^2)^{1/2}\,\xi^n\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2}\Bigg]_{-1}^{1} - n\,(1-\mu^2)^{1/2}\int_{-1}^{1}\xi^{n-1}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2}$$

$$I_n = \lambda\,(1+\mu)^{1/2}(1-\mu)^{1/2}\left[\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{1/2} - (-1)^n\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{1/2}\right] - n\lambda I_{n-1}$$

De donde

$$\boxed{I_n = \lambda\left[(1+\mu) - (-1)^n(1-\mu) - n\,I_{n-1}\right]}$$

siendo $\boxed{I_0 = 2\mu\lambda}$

Con esto se tiene:

$$K_{11} = \frac{E\ell}{2}\cdot\frac{1}{4\ell^2}\,A\,(1-\mu^2)^{1/2}\int_{-1}^{1}9(\xi^2-1)^2\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\xi/2}d\xi$$

$$\boxed{K_{11} = \frac{EA}{8\ell}\,9\,(I_4 - 2I_2 + I_0)}$$

Del mismo modo:

$$K_{12} = K_{21} = -\frac{EA}{8\ell}\, 9\left[I_4 - 2 I_2 + I_0 \right]$$

$$K_{13} = K_{31} = \frac{EA}{8\ell}\, 3\left[3 I_4 - 2 I_3 - 4 I_2 + 2 I_1 + I_0 \right]$$

$$K_{14} = K_{41} = \frac{EA}{8\ell}\, 3\left[3 I_4 + 2 I_3 - 4 I_2 - 2 I_1 + I_0 \right]$$

$$K_{22} = \frac{EA}{8\ell}\, 9\left[I_4 - 2 I_2 + I_0 \right]$$

$$K_{23} = K_{32} = -\frac{EA}{8\ell} 3\left[3 I_4 - 2 I_3 - 4 I_2 + 2 I_1 + I_0 \right]$$

$$K_{24} = K_{42} = -\frac{EA}{8\ell}\, 3\left[3 I_4 + 2 I_3 - 4 I_2 - 2 I_1 + I_0 \right]$$

$$K_{33} = \frac{EA}{8\ell}\left[9 I_4 - 12 I_3 - 2 I_2 + 4 I_1 + I_0 \right]$$

$$K_{34} = \frac{EA}{8\ell}\left[9 I_4 - 10 I_2 + I_0 \right] = K_{43}$$

$$K_{44} = \frac{EA}{8\ell}\left[9 I_4 + 12 I_3 - 2 I_2 - 4 I_1 + I_0 \right]$$

ELIMINACION DE $u_{,x1}$ Y $u_{,x2}$

Se puede escribir la matriz de rigidez $\underline{K}$ particionada de la siguiente forma:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K_{aa}} & \underline{K_{ab}} \\ \underline{K_{ba}} & \underline{K_{bb}} \end{bmatrix}$$

significando el subíndice "a" los grados de libertad activos, u_1 y u_2, y el "b" los que se quiere eliminar, $u_{,x1}$ y $u_{,x2}$.

Se tiene por lo tanto la expresión:

$$\begin{bmatrix} \underline{P_a} \\ \underline{P_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K_{aa}} & \underline{K_{ab}} \\ \underline{K_{ba}} & \underline{K_{bb}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d_a} \\ \underline{d_b} \end{bmatrix} \qquad \underline{d_a} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{d_b} = \begin{bmatrix} u_{,x1} \\ u_{,x2} \end{bmatrix}$$

Considerando la 2ª ecuación:

$$\underline{P}_b = \underline{K}_{ba}\,\underline{d}_a + \underline{K}_{bb}\,\underline{d}_b$$

$$\underline{d}_b = \underline{K}_{bb}^{-1}\,\underline{P}_b - \underline{K}_{bb}^{-1}\,\underline{K}_{ba}\,\underline{d}_a$$

y entrando con esto en la 1ª ecuación

$$\underline{P}_a = \underline{K}_{aa}\,\underline{d}_a + \underline{K}_{ab}\,\underline{K}_{bb}^{-1}\,\underline{P}_b - \underline{K}_{ab}\,\underline{K}_{bb}^{-1}\,\underline{K}_{ba}\,\underline{d}_a$$

$$\underline{P}_a - \underline{K}_{ab}\,\underline{K}_{bb}^{-1}\,\underline{P}_b = \left[\underline{K}_{aa} - \underline{K}_{ab}\,\underline{K}_{bb}^{-1}\,\underline{K}_{ba}\right]\underline{d}_a$$, es decir:

$$\underline{P}^* = \underline{K}^*\,\underline{d}^*$$

siendo la nueva matriz de rigidez:

$$\boxed{\underline{K}^* = \underline{K}_{aa} - \underline{K}_{ab}\,\underline{K}_{bb}^{-1}\,\underline{K}_{ba}}$$

y el vector de cargas consistentes

$$\boxed{\underline{P}^* = \underline{P}_a - \underline{K}_{ab}\,\underline{K}_{bb}^{-1}}$$

Con

$$\underline{K}_{aa} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} ; \quad \underline{K}_{ab} = \underline{K}_{ba}^{T} = \begin{bmatrix} K_{13} & K_{14} \\ K_{23} & K_{24} \end{bmatrix} ;$$

$$\underline{K}_{bb} = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} \\ K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}$$

O bien, haciendo

$B = 9\,[I_4 - 2I_2 + I_0]$

$C = 3\,[3I_4 - 4I_2 + I_0]$

$D = 3\,[2I_3 - 2I_2]$

$E = [9I_4 - 2I_2 + I_0]$

$F = [12I_3 - 4I_2]$

$G = [9I_4 - 10I_2 + I_0]$

se tiene:

$$\underline{K}_{aa} = \begin{bmatrix} B & -B \\ -B & B \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{K}_{ab} = \underline{K}_{ba}^{T} = \begin{bmatrix} C-D & C+D \\ -C+D & -C-D \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{K}_{bb} = \begin{bmatrix} E-F & G \\ G & E+F \end{bmatrix}$$

Con lo cual

$$\underline{K}_{bb}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} E+F & -G \\ -G & E-F \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{con } \boxed{\Delta = E^2 - F^2 - G^2}$$

Siendo entonces la nueva matriz de rigidez:

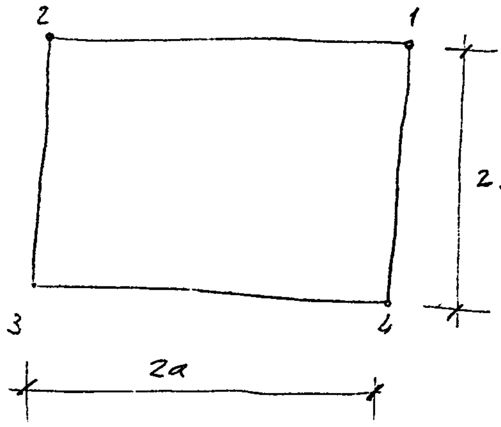
$$\underline{K}^* = K \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{con}$$

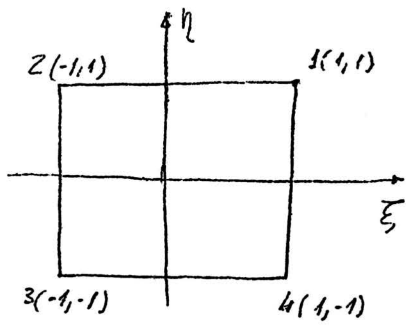
$$\boxed{K = \frac{EA}{8\ell} \left\{ B - \frac{1}{\Delta} \left[2E(C^2+D^2) - 4CDF - 2G(C^2-D^2) \right] \right\}}$$

Ejercicio 4.3.

Obtener la matriz de rigidez del elemento rectangular de la figura para un problema de tensión plana con material isótropo.

Se considerará espesor variable, siendo t_i el espesor en el nudo i





Haciendo el cambio de variables:

$$\xi = \frac{x}{a} \quad ; \quad \eta = \frac{z}{b}$$

el rectángulo se transforma en el cuadrado de la figura.

Las funciones de forma son:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$$, es decir:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

teniendose entonces:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$ o bien

$$\underline{u} = [\underline{N}_1 , \underline{N}_2 , \underline{N}_3 , \underline{N}_4] \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \\ \underline{u}_4 \end{bmatrix} = \underline{N}\ \underline{d}$$

con $$\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\underline{N_i} = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

La ley de espesores en el elemento es

$$t = t_1 N_1 + t_2 N_2 + t_3 N_3 + t_4 N_4$$

Ejercicio 4.4.

Determinar la matriz de rigidez de una pieza recta de sección constante, considerando la deformación por cortante, mediante:

a) Teorema de Castigliano. Solución exacta.

b) Método de los elementos finitos.

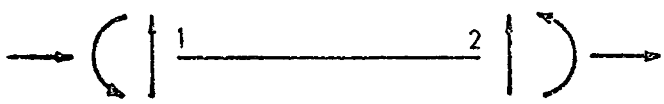


Fig. E2. 8 a

A, I, A' son el área, inercia y área reducida de cortante.

E y G son los módulos de elasticidad y cortante.

a) Se adopta el sistema isostático básico que se indica en la figura E2.8b.

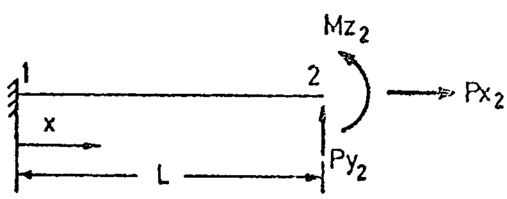


Fig. E2.8 b

Sea $\underline{S}= \begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix}$ matriz en esfuerzos que actúan en el nudo 2.

Los correspondientes movimientos en ese nudo (deformaciones) son:

$e = \frac{\partial U}{\partial \underline{s}}$

en donde $U= \frac{1}{2}\int_0^L M^2 \frac{dx}{EI} + \frac{1}{2}\int_0^L N^2 \frac{dx}{E\Omega} + \frac{1}{2}\int_0^L Q^2 \frac{ds}{6A}$

con $M= M_z + P_{y2} \cdot (L-x)$

$N= P_{x2}$

$Q= P_{y2}$ y $e= (e_{x2}, e_{y2}, e_{\theta 2})^T$

Entonces, llevando a cabo las integrales anteriores, se obtiene:

$$e_{x2}= \frac{\partial U}{\partial P_{x2}} = \int_0^L P_{x2} \frac{dx}{EA} = P_{x2} \frac{L}{EA}$$

$$e_{y2}= \frac{\partial U}{\partial P_{y2}} = \int_0^L \{M_{z2}+P_{y2}(L-x)\} x \; dx + \int_0^L P_{y2} \frac{dx}{GA'} = M_{z2} \frac{L^2}{2EI} + P_{y2} \frac{L^3}{3EI} + P_{y2} \frac{L}{6A'}$$

$$e_{\theta 2}= \frac{\partial U}{\partial M_{z2}} = \int_0^L \{M_{z2}+P_{y2} \cdot (L-x)\} = M_{z2} \frac{L}{EI} + P_{y2} \frac{L^2}{2EI}$$

es decir

$\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{F}\ \underset{\sim}{s}$ con $F = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} + \frac{L}{6A'} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$

$\underset{\sim}{S} = F^{-1}\ \underset{\sim}{e} = K\underset{\sim}{e}$,

con

$$\underline{K} = \underline{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\frac{L}{GA'} + \frac{L^2}{12EI}} & \dfrac{-1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} \\ 0 & \dfrac{-1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} & \frac{EI}{L} + \dfrac{L}{\frac{4}{GA'} + \frac{L^2}{3EI}} \end{bmatrix}$$

Para calcular H se tiene en cuenta la figura E2.8b.

$$\underline{S}^* = \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = -\underline{H} \begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$-\underline{HF}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-1}{\frac{L}{GA'} + \frac{L^3}{12EI}} & \dfrac{+1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} \\ 0 & \dfrac{-1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} & -\frac{EI}{L} + \dfrac{L}{\frac{4}{GA'} + \frac{L^2}{3EI}} \end{bmatrix}$$

$$-\underset{\sim}{F}^{-1}\underset{\sim}{H}^{T} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-1}{\frac{L}{GA'} + \frac{L^3}{12EI}} & \dfrac{-1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} \\ 0 & \dfrac{1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} & -\frac{EI}{L} + \dfrac{L}{\frac{4}{GA'} + \frac{L^2}{3EI}} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{F}^{-1}\ \underset{\sim}{H}^{T} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\frac{L}{GA'} + \frac{L^3}{12EI}} & \dfrac{1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} \\ 0 & \dfrac{1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} & \frac{EI}{L} + \dfrac{L}{\frac{4}{GA'} + \frac{L^2}{3EI}} \end{bmatrix}$$

Luego, la matriz de rígidez es:

$$
\underline{K} = \left\| \begin{matrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\[2ex]
0 & \dfrac{1}{\frac{L}{GA'} + \frac{L^3}{12EI}} & \dfrac{1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} & 0 & \dfrac{-1}{\frac{L}{GA'} + \frac{L^3}{12EI}} & \dfrac{1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} \\[2ex]
0 & \dfrac{1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} & \frac{EI}{L} + \dfrac{L}{\frac{4}{GA'} + \frac{L^2}{3EI}} & 0 & \dfrac{-1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} & -\frac{EI}{L} + \dfrac{L}{\frac{4}{GA'} + \frac{L^2}{3EI}} \\[2ex]
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\[2ex]
0 & \dfrac{-1}{\frac{L}{GA'} + \frac{L^3}{12EI}} & \dfrac{-1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} & 0 & \dfrac{1}{\frac{L}{GA'} + \frac{L^3}{12EI}} & \dfrac{-1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} \\[2ex]
0 & \dfrac{1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} & -\frac{EI}{L} + \dfrac{L}{\frac{4}{GA'} + \frac{L^2}{3EI}} & 0 & \dfrac{-1}{\frac{2}{GA'} + \frac{L^2}{6EI}} & \frac{EI}{L} + \dfrac{L}{\frac{4}{GA'} + \frac{L^2}{3EI}}
\end{matrix} \right\|
$$

b) Método de los elementos finitos.

Conviene redefinir el vector deformación y las variables de campo, ya que ahora no es únicamente la flecha w, sino el ángulo de giro de la sección, θ

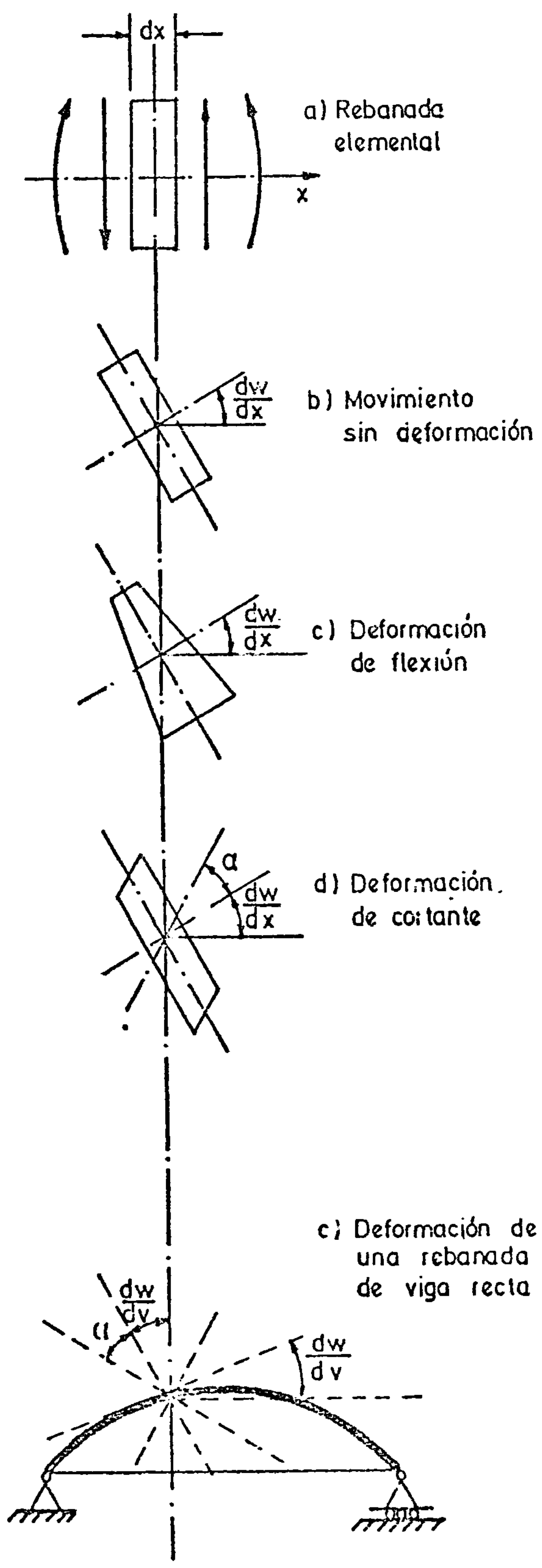


Fig. E2.8c

Según la figura E2.8c. se tiene:

$$\frac{dw}{dx}+\alpha=\theta.$$

con w flecha

α giro debido al cortante.

θ ángulo de giro total de la sección.

Así, pues, en una sección genérica de una viga no son iguales θ y $\frac{dw}{dx}$, si se considera la deformación por cortante. El vector de campo es pues

$$\underline{u}=(w,\ \theta)^T.$$

Las ecuaciones constitutivas son

$$M \frac{1}{EI}=\frac{d\theta}{dx}$$

$$Q \frac{1}{GA'}=\alpha.$$

La energía de deformación de una barra es entonces:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}\int_0^L GA'\left(\theta-\frac{dw}{dx}\right)^2dx$$

{E2.8a.}

Se adoptan como funciones de forma para un elemento las lineales, ya que el pro blema es C°; Por lo tanto $w=(N_1,N_2)\binom{w_1}{w_2}$ y $\theta=(N_1,N_2)\binom{\theta_1}{\theta_2}$ {E2.8b.}

Los grados de libertad del elemento de flexión se ven en la figura E2.8e.

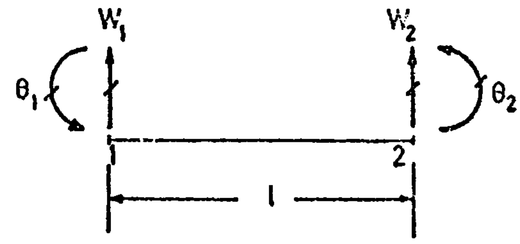


Fig. E2.8 d. Elemento de flexión

Siendo

$$N_1 = 1-\frac{x}{L} \qquad \text{y} \qquad N_2 = \frac{x}{L}.$$

El vector deformación es:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{d\theta}{dx} \\ \alpha \end{bmatrix}$$

y el correspondiente vector tensión $\underline{\sigma}$ es:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix}$$

La relación deformación-desplazamientos, se obtiene a partir de la expresión:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \theta \end{bmatrix} = L\,\underline{u}$$

Por lo tanto

$$\underline{\varepsilon} = \{\underline{B}_1 \quad \underline{B}_2\} \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \end{bmatrix} = \underline{B}\ \underline{d}$$

con $\underline{d}_i = \{w_i, \theta_i\}$ vector de desplazamientos (incógnitas básicas) en el nudo i.

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_i}{dx} \\ -\frac{dN_i}{dx} & N_i \end{bmatrix}$$

La matriz elástica del material $\underline{D}$, es

$\underline{D}$= diag.{EI, GA'}

Por lo tanto la matriz de rigidez, es:

$$\underline{k} = \int_0^L \underline{B}^T \, \underline{D} \, \underline{B} \, dx.$$

No obstante, conviene, por razones de estabilidad númerica, separar las contribuciones de las deformaciones por cortante y flexión en la matriz de rigidez. Por lo que si se sustituyen las expresiones {E2.8b.} en {E2.8a.}, se obtiene (se supone sección constante):

$$U = \frac{EI}{2} \underline{\theta}^T \left\{ \int_0^L \begin{bmatrix} N_{1,x}^2 & N_{1,x} N_{2,x} \\ N_{1,x} N_{2,x} & N_{2,x}^2 \end{bmatrix} dx \right\} \underline{\theta} +$$

$$\frac{GA'}{2} \{\underline{w}^T, \underline{\theta}^T\} \left\{ \int_0^L \begin{bmatrix} N_{1,x}^2 & N_{1,x} N_{2,x} & -N_{1,x} N_1 & -N_{1,x} N_2 \\ N_{2,x} \cdot N_{1,x} & N_{2,x}^2 & -N_{2,x} N_1 & -N_{2,x} N_2 \\ -N_{1,x} N_1 & -N_{2,x} N_1 & N_1^2 & N_1 N_2 \\ -N_{1,x} N_2 & -N_{2,x} N_2 & N_1 N_2 & N_2^2 \end{bmatrix} dx \right\} \begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{\theta} \end{bmatrix}$$

con $N_{i,x} = \frac{\partial N_i}{\partial x}$, $\quad \underline{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ y $\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$

como $\int_0^L N_{i,x}^2 \, dx = \frac{1}{L}$ $\qquad \int_0^L N_{i,x} N_{j,x} \, dx = -\frac{1}{L} \quad i \neq j$

$\int_0^L N_{1,x} N_i \, dx = -\frac{1}{2}$ $\qquad \int_0^L N_{2,x} N_i \, dx = +\frac{1}{2}$

$\int_0^L N_i^2 \, dx = \frac{L}{3}$ $\qquad \int_0^L N_i N_j \, dx = \frac{L}{6}$

Se deduce

$$U = \frac{EI}{2L}\,\underline{\theta}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \underline{\theta} + \frac{GA'}{2L}\,\{\underline{w}^T, \underline{\theta}^T\} \begin{bmatrix} 1 & -1 & +L/2 & +L/2 \\ -1 & 1 & -L/2 & -L/2 \\ +\frac{L}{2} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} & \frac{L^2}{6} \\ +\frac{L}{2} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{\theta} \end{bmatrix}$$

La matriz de rígidez es; evidentemente:

$$k = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & +k_2\frac{L}{2} & +k_2\frac{L}{2} \\ -k_2 & +k_2 & -k_2\frac{L}{2} & -k_2\frac{L}{2} \\ +k_2\frac{L}{2} & -k_2\frac{L}{2} & k_1+k_2\frac{L^2}{3} & -k_1+k_2\frac{L^2}{6} \\ +k_2\frac{L}{2} & -k_2\frac{L}{2} & -k_1+k_2\frac{L^2}{6} & k_1+k_2\frac{L^2}{3} \end{bmatrix} \quad \text{con } k_1 = \frac{EI}{L} \text{ y } k_2 = \frac{GA'}{L}$$

El problema fundamental con la consideración del cortante en la matriz de rígidez, es la posible inestabilidad numérica que aparece. Si h es el canto de la viga, se denomina factor de aspecto al valor $\frac{h}{L}$. Las características mecánicas de la viga son $I = \frac{1}{12}bh^3$ y $A' = k\,b\,h$ (con k dependiendo del tipo de sección) siendo b el ancho de la sección (se supone, la sección rectangular, pero es aplicable a cualquier sección general).

Para el valor $k_1+k_2\frac{L^2}{3} = \frac{1}{12}bh^3 + k\,b\,h\,\frac{L^2}{3} = b\frac{h}{3}L^2\ \{k + \frac{1}{12}\frac{h^2}{L^2}\}$.

Se comprende que si el factor de aspecto $\frac{h}{L}$, es pequeño, en el elemento (caso normal de vigas delgadas), la contribución de la flexión es despreciable, es decir $\frac{h}{L} \ll 1$ y con mayor motivo $\frac{1}{12}(\frac{h}{L})^2 \ll k$, y no puede ser recogida en el cálculo con un computador que trabaja con un número finito de cifras significativas.

Existe la técnica de la integración reducida, con objeto de obviar el problema anterior. Se utiliza, un solo punto de Gauss, para evaluar las integrales de contribución del cortante, en los casos de vigas delgadas ($\frac{h}{L} << 1$). En otras situaciones, se calcula exactamente.

Ejercicio E5.1.

1. Determinar las funciones de forma o de interpolación del elemento finito monodimensional (1-D) de la figura E2.2a. "barra recta de tres nudos" sometido a un esfuerzo axil. Se supone un desarrollo polinómico para el desplazamiento longitudinal u(x).
2. Dibujar dichas funciones de forma.
3. Indicar sus propiedades más importantes.

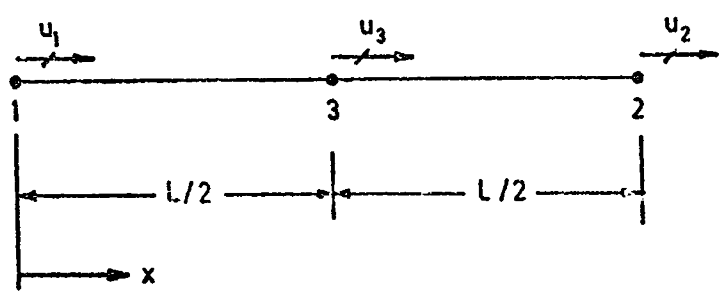


Fig. E2. 2a

4. Conocidas las funciones de forma N_i del elemento finito 1-D "barra recta de tres nudos" anterior, determinar la matriz de rigidez $\underset{\sim}{K}$. Hallar la matriz de rigidez para el caso en que se consideren solamente -- dos nudos y la matriz de rigidez exacta.
5. Si actúa una carga longitudinal uniforme en toda la longitud de la barra, se desea conocer la expresión de las cargas concentradas equivalentes en los nudos (solución inicial).
6. Mediante la técnica de condensación estática, obtener los resultados de los dos apartados anteriores, para la barra recta con dos nudos 1-2, tras la eliminación del grado de libertad del nudo intermedio 3.
7. Comparar estos resultados con los obtenidos en un cálculo exacto sin la aproximación del método de los elementos finitos.

   Módulo de elasticidad: E.

   Area de la sección A_x variable linealmente desde un valor A_1 en el nudo 1, al valor A_2 en el nudo 2.

1) Considerando la figura E2.2b. y que:

$\xi = \frac{x}{l}$ $\quad A_x = (1+\mu\xi)A_1$ $\quad$ con $\mu = \frac{A_2 - A_1}{A_1}$

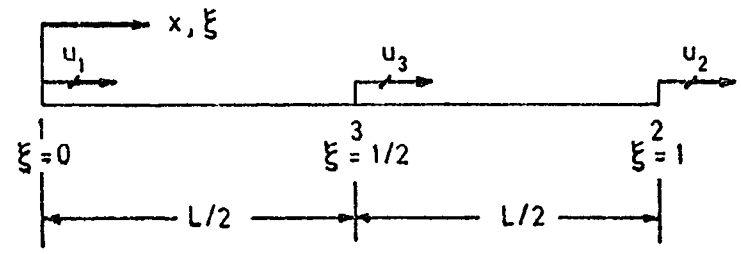


Fig. E2.2b

y sabiendo que las funciones de forma son nulas en todos los nudos menos en uno de ellos se tiene que las funciones de interpolación son:

$N_1 = (2\xi-1)(\xi-1) \qquad N_2 = \xi(2\xi-1) \qquad N_3 = 4\xi(1-\xi).$

2) Los gráficos de las funciones de forma son:

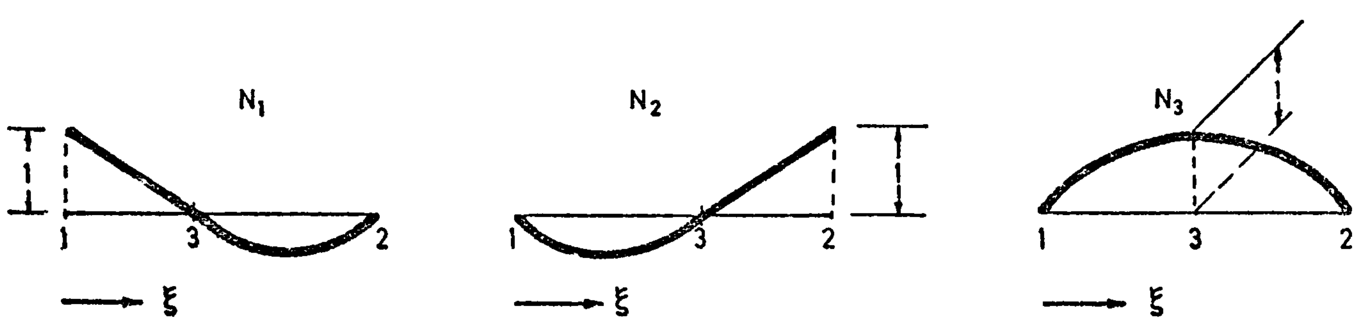


Fig. E2.2c

3) Las funciones de forma cumplen:

$N_1 + N_2 + N_3 = 1$

$N_i(x_j) = \delta_{ij}$

4) La relación deformación-desplazamientos es:

$\underline{\varepsilon}= \underline{B}\ \underline{u}$ con $\underline{B}= \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{L}\underline{N}_{,\xi}$

$B_1= \frac{4}{L}(\xi- \frac{3}{4})$ $B_2= \frac{4}{L}(\xi- \frac{1}{4})$ $B_3= \frac{4}{L}(1-2\xi)$

La matriz de rígidez es:

$$k_{ij}= E\int_0^L B_i\ A_x\ B_j\ dx= LE\int_0^1 B_i\ A_x\ B_j\ d\xi$$

$$\underline{k}= \begin{bmatrix} \frac{7}{3} + \frac{1}{2}\mu & \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\mu & -\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\mu \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\mu & \frac{7}{3} + \frac{11}{6}\mu & -\frac{8}{3} - 2\mu \\ -\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\mu & -\frac{8}{3} - 2\mu & \frac{16}{3} + \frac{S}{3}\mu \end{bmatrix} \quad \frac{EA_1}{L}$$

(1) -Matriz de rígidez del elemento 1-D "barra recta con dos nudos" de sección variable.

$N_1= 1-\xi$ $N_2= \xi$ $B_1= -\frac{1}{L}$, $B_2= \frac{1}{L}$

$$k= \frac{EA}{L}\{\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\}\ (1+\frac{\mu}{2})$$

La matriz de rígidez exacta es:

$$\underline{k}_{exacta}= \frac{EA_1}{L}\ \frac{\mu}{Ln(1+\mu)}\ \{\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\}.$$

5) $(P_1,\ P_2,\ P_3)= \int_0^L (N_1,\ N_2,\ N_3)\ q\ dx=$

$qL\int_0^1 \{(2\xi-1)(\xi-1)\quad \xi(2\xi-1)\quad 4\xi(1-\xi)\}\ d\xi= qL(1/6,\ 1/6,\ 2/3)$

$P_1= \frac{qL}{6}$, $P_2= \frac{qL}{6}$, $P_3= \frac{2qL}{3}$.

(1) $(P_1^{(1)}\quad P_2^{(1)})= \int_0^1 (N_1\ N_2)q\ dx= qL\int_0^1\{(1-\xi)\quad \xi\}\ d\xi =$

$= qL\ (\frac{1}{2}\quad \frac{1}{2})$

$P_1^{(1)}= \frac{qL}{2}\quad \frac{qL}{2}$

$P_{1exacta}= (\frac{1}{Ln(1+\mu)} - \frac{1}{u})qL$, $P_{2\ exacta}= (\frac{-1}{Ln(1+\mu)} + 1+\frac{1}{\mu})qL$

6) Condensación estática

$$u_3 = \frac{4+\mu}{4(2+\mu)}\, u_1 + \frac{4+3\mu}{4(2+\mu)}\, u_2$$

$$\underline{k}^* = \frac{EA_1}{L} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \frac{(\mu^2+6\mu+6)}{3(2+\mu)}$$

Condensación estática:

$$P_1^* = p_1 - k_{13}\, k_{33}^{-1}\, p_3 = \frac{qL}{6} + \frac{4+\mu}{4(2+\mu)}\, \frac{2qL}{3} = \frac{qL}{3}\, \frac{3+\mu}{2+\mu}$$

$$P_2^* = p_2 - k_{23}\, k_{33}^{-1}\, p_3 = \frac{ql}{6} + \frac{4+3\mu}{4(2+\mu)}\, \frac{2qL}{3} = \frac{ql}{3}\, \frac{3+2u}{2+u}$$

7)

Valores μ	$k_{aprox.}$	k_{exacto}	$k_{aprox.}^{(1)}$
0	1	1	1
1	1,444	1,443	1,500
10	4,611	4,170	6.000
100	34,660	21,668	51.000

Valores μ	P_1aprox.	P_1exacta	P_1aprox.$^{(1)}$
0	0.500	0.500	0.5
1	0,444	0,443	0.5
10	0,361	0,317	0.5
100	0,337	0,207	0.5

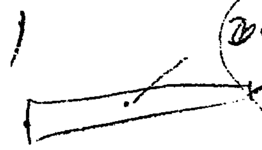
Ejercicio 5.2

Determinar la matriz de rigidez y las cargas nodales equivalentes a una carga vertical uniforme de valor q de una barra recta a flexión, considerando un desarrollo polinómico a trozos para la flecha vertical. El elemento 1-D se supone con continuidad C^1, es decir, se satisface la hipótesis de Navier.

Se supone una variación lineal de la inercia entre $I_1 = I$ e $I_2 = kI$

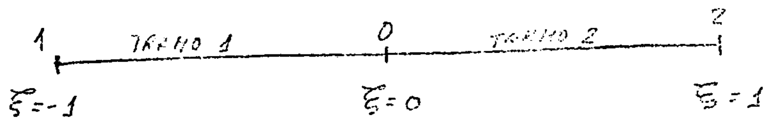
Este elemento constituye la contrapartida monodimensional del elemento C^1 de Clough-Felippa.

Falta 5.1



bien dos nudos o 3 nudos

ELEMENTO PADRE:



Variación de inercias $\quad I_\xi = \frac{I}{2}\left[1 + k - \xi(1-k)\right]$

TRAMO 1

$$W^{(1)} = a\xi^2 + b\xi + c = [\xi^2, \xi, 1]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Condiciones:

$$W^{(1)}\Big|_{\xi=-1} = w_1 \quad ; \quad W^{(1)}\Big|_{\xi=0} = w_0 \quad ; \quad \frac{dW^{(1)}}{d\xi}\Big|_{\xi=-1} = \theta_1$$

Es decir:

$$a = w_0 - w_1 - \theta_1$$
$$b = 2w_0 - 2w_1 - \theta_1$$
$$c = w_0$$

ó

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_0 \end{pmatrix} =$$

Con lo cual

$$W^{(1)} = [\xi^2 \quad \xi \quad 1]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [N_1^{(1)}, N_2^{(1)}, N_3^{(1)}, N_4^{(1)}, N_5^{(1)}]\begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_0 \end{bmatrix} = \underline{N}^{(1)}\underline{d}$$

Con

$$N_1^{(1)} = -\xi^2 - 2\xi$$
$$N_2^{(1)} = -\xi^2 - \xi$$
$$N_3^{(1)} = 0$$
$$N_4^{(1)} = 0$$
$$N_5^{(1)} = (1 + \xi)^2$$

TRAMO 2

Análogamente, se obtiene:

$$W^{(2)} = [N_1^{(2)}, N_2^{(2)}, N_3^{(2)}, N_4^{(2)}, N_5^{(2)}]\,\underline{d} = \underline{N}^{(2)}\underline{d}$$

Con $\quad \underline{d}^T = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2, w_0]$

$$N_1^{(2)} = 0$$
$$N_2^{(2)} = 0$$
$$N_3^{(2)} = -\xi^2 + 2\xi$$
$$N_4^{(2)} = \xi^2 - \xi$$
$$N_5^{(2)} = (1-\xi)^2$$

Se impone la condición de continuidad C^1 en el elemento, en el nudo 0, es decir:

$$\theta_0^{(1)} = \left.\frac{dw^{(1)}}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{dw^{(2)}}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \theta_0^{(2)}$$

o equivalentemente

$$[-2, -1, 0, 0, 2]\,\underline{d} = [0, 0, 2, -1, -2]\,\underline{d} \qquad [1]$$

Despejando w_0 de la ecuación anterior [1], se obtiene.

$$w_0 = \frac{1}{4}[2, -1, 2, -1]\begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]\begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Si se sustituye esta expresión de w_0 en los desarrollos de $w^{(1)}$ y $w^{(2)}$ anteriores se deducen las siguientes fórmulas:

$$w^{(1)} = [\bar{N}_1^{(1)}, \bar{N}_2^{(1)}, \bar{N}_3^{(1)}, \bar{N}_4^{(1)}]\begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \underline{\bar{N}}^{(1)} \cdot \underline{\bar{d}}$$

$$w^{(2)} = [\bar{N}_1^{(2)}, \bar{N}_2^{(2)}, \bar{N}_3^{(2)}, \bar{N}_4^{(2)}]\begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \underline{\bar{N}}^{(2)} \cdot \underline{\bar{d}}$$

Con $\bar{N}_i^{(1)} = N_i^{(1)} + \lambda_i N_5^{(1)}$

$\bar{N}_i^{(2)} = N_i^{(2)} + \lambda_i N_5^{(2)}$

$i = 1, 2, 3, 4$

es decir

$$\bar{N}_1^{(1)} = \frac{1 - 2\xi - \xi^2}{2} \qquad \bar{N}_1^{(2)} = \frac{(1-\xi)^2}{2}$$

$$\bar{N}_2^{(1)} = \frac{(1+\xi)(1-3\xi)}{4} \qquad \bar{N}_2^{(2)} = \frac{(1-\xi)^2}{4}$$

$$\bar{N}_3^{(1)} = \frac{(1+\xi)^2}{2} \qquad \bar{N}_3^{(2)} = \frac{1 + 2\xi - \xi^2}{2}$$

$$\bar{N}_4^{(1)} = \frac{-(1+\xi)^2}{4} \qquad \bar{N}_4^{(2)} = -\frac{(1-\xi)(1+3\xi)}{4}$$

El vector deformación curvatura es:

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{d^2 w^{(1)}}{d\xi^2} = \left(-1, -\tfrac{3}{2}, +1, -\tfrac{1}{2}\right) \underline{d} = \underline{B}^{(1)} \underline{d}$$

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{d^2 w^{(2)}}{d\xi^2} = \left(+1, +\tfrac{1}{2}, -1, +\tfrac{3}{2}\right) \underline{d} = \underline{B}^{(2)} \underline{d}$$

(Dos constantes diferentes en cada tramo)

La matriz de rigidez es:

$$k_{ij} = \int_{-1}^{1} B_i D B_j \, d\xi = B_i^{(1)} \left[\int_{-1}^{0} E I_\xi \, d\xi \right] B_j^{(1)} + B_i^{(2)} \left[\int_{0}^{1} E I_\xi \, d\xi \right] B_j^{(2)}$$

$$\int_{-1}^{0} I_\xi \, d\xi = \frac{I}{2} \left[(1+k) + \tfrac{1}{2}(1-k) \right] = \frac{I}{4}(3+k)$$

$$\int_{0}^{1} I_\xi \, d\xi = \frac{I}{2} \left[(1+k) - \tfrac{1}{2}(1-k) \right] = \frac{I}{4}(1+3k)$$

$$\underline{k} = \frac{EI}{4}(3+k)\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1 & 1/2 \\ 3/2 & 9/4 & -3/2 & 3/4 \\ -1 & -3/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 3/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix} + \frac{EI}{4}(1+3k)\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 & 3/2 \\ 1/2 & 1/4 & -1/2 & 3/4 \\ -1 & -1/2 & 1 & -3/2 \\ 3/2 & 3/4 & -3/2 & 9/4 \end{bmatrix}$$

și deci

$$\underline{K} = EI \times \begin{bmatrix} (1+k) & \frac{1}{4}(5+3k) & -(1+k) & \frac{1}{4}(3+5k) \\ & \frac{1}{4}(7+3k) & -\frac{1}{4}(5+3k) & \frac{3}{4}(1+k) \\ & & (1+k) & -\frac{1}{4}(3+5k) \\ & & & \frac{1}{4}(3+7k) \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.3

Obtener la matriz de rigidez de una viga recta semiinfinita de inercia constante I y sometida a un medio continuo simulado mediante dos coeficientes de balasto $k_{u} = \bar{k}_{u} \cdot x$ y $k_{\theta} = \bar{k}_{\theta}\, x$ (al movimiento vertical y al giro). x es la abscisa medida desde el extremo de la viga

Se adoptará como función de forma $(ax+b)\, e^{-\lambda x}$.

Indicar un criterio de selección del parámetro λ.

$W = (ax+b)e^{-\lambda x}$ debe satisfacer:

$$\left.\begin{aligned} W\big|_{x=0} &= W_0 \\ \frac{dw}{dx}\Big|_{x=0} &= \theta_0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} b &= W_0 \\ a-\lambda b &= \theta_0 \end{aligned}\right.$$, es decir

$$w = (\lambda x+1)e^{-\lambda x} W_0 + x\cdot e^{-\lambda x}\theta_0 = \left[(\lambda x+1)e^{-\lambda x},\ x e^{-\lambda x}\right]\begin{bmatrix} W_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{N}\,\underline{d}$$

Por otra parte, la energía potencial total es:

$$V(w) = \frac{1}{2}\int_0^\infty EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \bar{k}_w x\cdot w^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty k_\theta x\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx - [W_0,\theta_0]\begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left[\underline{N}\,\underline{d}\right] = \frac{d^2\underline{N}}{dx^2}\,\underline{d} = \underline{B}\,\underline{d}$$, con

$$\underline{B} = \frac{d^2}{dx^2}\underline{N} = \left[\lambda^2(\lambda x-1)e^{-\lambda x},\ \lambda(\lambda x-2)e^{-\lambda x}\right]$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{d\underline{N}}{dx}\cdot\underline{d} = \left[-\lambda^2 x e^{-\lambda x},\ (1-\lambda x)e^{-\lambda x}\right]\cdot\underline{d} = \underline{N}_{,x}\,\underline{d}$$

Sustituyendo en (1) resulta

$$V(w) = \frac{1}{2}EI\int_0^\infty \underline{d}^T\underline{B}^T\underline{B}\,\underline{d}\,dx + \frac{1}{2}\bar{k}_w\int_0^\infty x\,\underline{d}^T\underline{N}^T\underline{N}\,\underline{d}\,dx + \frac{1}{2}k_\theta\int_0^\infty x\,\underline{d}^T\underline{N}_{,x}^T\underline{N}_{,x}\underline{d}\,dx - \underline{d}^T\underline{P}$$

Imponiendo la condición de energía potencial mínima:

$$\frac{dV(w)}{d\underline{d}} = 0$$, resulta:

$$EI\int_0^\infty \underline{B}^T\underline{B}\,dx\cdot\underline{d} + \bar{k}_w\int_0^\infty x\,\underline{N}^T\underline{N}\,dx\cdot\underline{d} + \bar{k}_\theta\int_0^\infty x\,\underline{N}_{,x}^T\underline{N}_{,x}\,dx\cdot\underline{d} = \underline{P}$$

o lo que es lo mismo:

$$\underline{K}\,\underline{d} = \underline{P}$$

Con

$$\underline{K} = EI\int_0^\infty \underline{B}^T\underline{B}\,dx + \bar{k}_w\int_0^\infty x\,\underline{N}^T\underline{N}\,dx + \bar{k}_\theta\int_0^\infty x\,\underline{N}_{,x}^T\,\underline{N}_{,x}\,dx$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_0^\infty e^{-2\lambda x}\,dx = \frac{1}{2\lambda}$$

$$\int_0^\infty x\,e^{-2\lambda x}\,dx = \frac{1}{4\lambda^2}$$

$$\int_0^\infty x^2\,e^{-2\lambda x}\,dx = \frac{1}{4\lambda^3}$$

$$\int_0^\infty x^3\,e^{-2\lambda x}\,dx = \frac{3}{8\lambda^4}$$

Se tiene:

$$K_{11}^1 = EI\lambda^4\int_0^\infty (\lambda x-1)^2 e^{-2\lambda x}\,dx = EI\lambda^4\left[\frac{\lambda^2}{4\lambda^3} - \frac{2\lambda}{4\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda}\right] = \frac{1}{4}EI\lambda^3$$

$$K_{12}^1 = K_{21}^1 = EI\lambda^3\int_0^\infty (\lambda x-1)(\lambda x-2)e^{-2\lambda x}\,dx = EI\lambda^3\left[\frac{\lambda^2}{4\lambda^3} - \frac{3\lambda}{4\lambda^2} + \frac{2}{2\lambda}\right] = \frac{1}{2}EI\lambda^2$$

$$K_{22}^1 = EI\lambda^2\int_0^\infty (\lambda x-2)^2 e^{-2\lambda x} = EI\lambda^2\left[\frac{\lambda^2}{4\lambda^3} - \frac{4\lambda}{4\lambda^2} + \frac{4}{2\lambda}\right] = \frac{5}{4}EI\lambda$$

$$K_{11}^2 = \bar{k}_w\int_0^\infty x(\lambda x+1)^2 e^{-2\lambda x}\,dx = \bar{k}_w\left[\frac{3\lambda^2}{8\lambda^4} + \frac{2\lambda}{4\lambda^3} + \frac{1}{4\lambda^2}\right] = \frac{9}{8}\bar{k}_w\cdot\frac{1}{\lambda^2}$$

$$K_{12}^2 = K_{21}^2 = \bar{k}_w\int_0^\infty x^2(\lambda x+1)\,e^{-2\lambda x}\,dx = \bar{k}_w\left[\frac{3\lambda}{8\lambda^4} + \frac{1}{4\lambda^3}\right] = \frac{5}{8}\bar{k}_w\cdot\frac{1}{\lambda^3}$$

$$K_{22}^2 = \bar{k}_w\int_0^\infty x^3 e^{-2\lambda x}\,dx = \frac{3}{8}\bar{k}_w\,\frac{1}{\lambda^4}$$

$$K_{11}^3 = \bar{k}_\theta\int_0^\infty \lambda^4 x^3\cdot e^{-\lambda x}\,dx = \bar{k}_\theta\,\frac{3\lambda^4}{8\lambda^4} = \frac{3}{8}\bar{k}_\theta$$

$$K_{12}^3 = K_{21}^3 = \bar{k}_\theta\int_0^\infty -\lambda^2x^2(1-\lambda x)e^{-2\lambda x}\,dx = \bar{k}_\theta\left[\frac{3\lambda^3}{8\lambda^4} - \frac{\lambda^2}{4\lambda^3}\right] = \frac{1}{8}\bar{k}_\theta\,\frac{1}{\lambda}$$

$$K_{22}^3 = \bar{k}_\theta\int_0^\infty x(1-\lambda x)^2 e^{-2\lambda x}\,dx = \bar{k}_\theta\left[\frac{3\lambda^2}{8\lambda^4} - \frac{2\lambda}{4\lambda^3} + \frac{1}{4\lambda^2}\right] = \frac{1}{8}\bar{k}_\theta\,\frac{1}{\lambda^2}$$

Con lo cual los términos de la matriz de rigidez serán:

$$\boxed{K_{ij} = K_{ji} = \sum_{n=1}^{3} K_{ij}^{n}} \quad ; \; (i, j = 1, 2)$$

El valor de λ puede ser arbitrario, obteniéndose para cada uno de ellos una matriz de rigidez más o menos aproximada. Es conveniente elegir aquél que haga mínima la traza de la matriz, es decir, el que verifique

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} K_{ii}^{j} \right] = 0$$

Ejercicio E5.4

El elemento finito no conforme de flexión (hipoelemento) de la figura E10.1a. tiene un campo de desplazamientos que puede suponerse aproximado por una ley parabólica de se-- gundo grado.

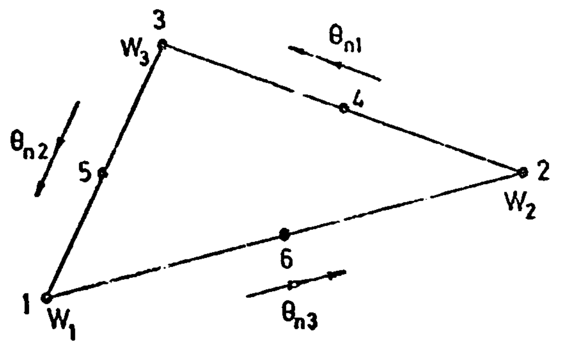


Fig. E 10 1a

Se pide:

1) Determinar la matriz de rigidez.
2) Para una carga vertical uniforme en todo el elemento, hallar las cargas equivalentes en los nudos.

1) Se supone la expresión de la flecha w parabólica, es decir, en coordenadas triangulares se tiene:

$$w=\alpha_1 L_1^2+\alpha_2 L_2^2+\alpha_3 L_3^2+2\beta_1 L_2 L_3+2\beta_2 L_1 L_3+2\beta_3 L_1 L_2 \qquad \{E10.1a.\}$$

Se formularán las ecuaciones que siguen en un nudo. En los restantes se obtendrán mediante permutación circular $1\to2\to3\to1$.

Los coeficientes α_i se determinan al imponer la condición de flecha para el nudo i. Resulta para el nudo 1(1,0,0), $\alpha_1=w_1$. Por lo tanto:

$$\alpha_1=w_1 \;;\; \alpha_2=w_2 \quad y \quad \alpha_3=w_3$$

Para calcular los coeficientes β, es preciso conocer antes la expresión de la derivada según la normal a un lado.

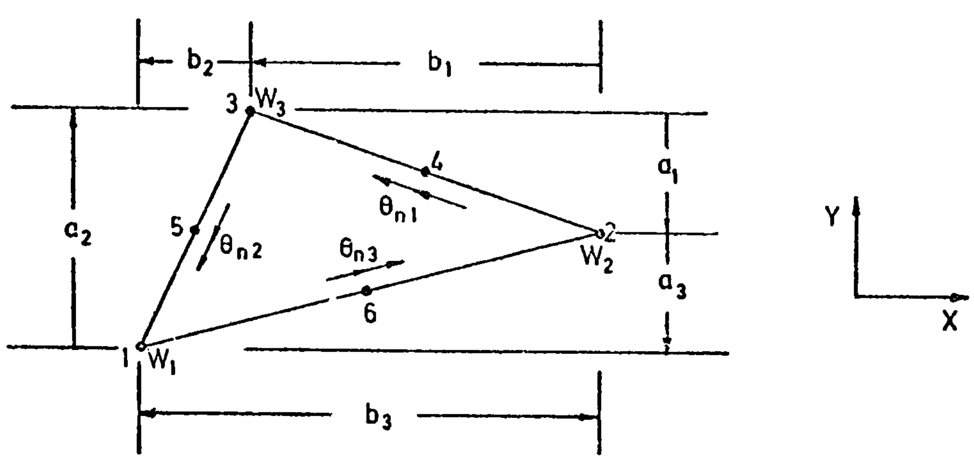


Fig. E10.1b

Las fórmulas de transformación de coordenadas son: (ver figura E10.1b.)

$$L_1=(a_1 x+b_1 y+c_1)\frac{1}{2A} \quad \text{y análogas}$$

con $a_1=y_2-y_3$

$b_1=x_3-x_2$

$c_1=(x_2 y_3-x_3 y_2)$

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{área del triángulo 123}$$

Entonces:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\left(a_1\frac{\partial w}{L_1}+a_2\frac{\partial w}{L_2}+a_3\frac{\partial w}{L_3}\right)\frac{1}{2A}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\left(b_1\frac{\partial w}{L_1}+b_2\frac{\partial w}{L_2}+b_3\frac{\partial w}{L_3}\right)\frac{1}{2A}$$

Sea α_3 el ángulo que forma el vector lado $\overline{12}$ en el eje positivo de abscisas x. Su valor es:

$$\cos\alpha_3=\frac{b_3}{m_3} \quad ; \quad \operatorname{sen}\alpha_3=\frac{-a_3}{m_3} \quad \text{con} \quad m_3=(a_3^2+b_3^2)^{1/2}>0$$

los cosenos directores de la normal (dirigida hacia el interior del triángulo) son:

$$\frac{a_3}{m_3}\ ,\ \frac{b_3}{m_3}$$

Por lo tanto la derivada según dicha normal es:

$$\frac{\partial w}{\partial n_3}=\frac{a_3}{m_3}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{b_3}{m_3}\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{2A}\left(\frac{a_1\,a_3+b_1\,b_3}{m_3}\frac{\partial w}{\partial L_1}+\frac{a_2\,a_3+b_2\,b_3}{m_3}\frac{\partial w}{\partial L_2}\right.$$
$$\left.+\frac{a_3^2+b_3^2}{m_3}\frac{\partial w}{\partial L_3}\right)$$

es decir:

$$\frac{\partial w}{\partial n_3}=\frac{m_3}{2A}\left(d_3\frac{\partial w}{\partial L_1}+e_3\frac{\partial w}{\partial L_2}+\frac{\partial w}{\partial L_3}\right)=h_3^{-1}\left(d_3\frac{\partial w}{\partial L_1}+e_3\frac{\partial w}{\partial L_2}+\frac{\partial w}{\partial L_3}\right)\text{(E10.1b.}$$

con

$$d_3=\frac{a_3\,a_1+b_3\,b_1}{m_3^2} \quad ; \quad e_3=\frac{a_3\,a_2+b_3\,b_2}{m_3^2} \quad \text{y} \quad h_3\,m_3=2A.$$

h_3 es la altura del triángulo que parte del nudo 3.

Las derivadas de la flecha w respecto a las coordenadas triangulares son:

$$\frac{\partial w}{\partial L_1} = 2(\alpha_1 L_1 + \beta_2 L_3 + \beta_3 L_2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial L_2} = 2(\alpha_2 L_2 + \beta_1 L_3 + \beta_3 L_1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial L_3} = 2(\alpha_3 L_3 + \beta_2 L_1 + \beta_1 L_2)$$

Al particularizar para el punto 6(1/2, 1/2, 0) resulta:

$$\frac{\partial w}{\partial L_1} = \alpha_1 + \beta_3 \qquad \frac{\partial w}{\partial L_2} = \alpha_2 + \beta_3 \qquad \frac{\partial w}{\partial L_3} = \beta_1 + \beta_2$$

Por lo tanto, al considerar {E10.1b.} se obtiene:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n_3}\right|_6 = \theta_{n3} = \{\alpha_1 d_3 + \alpha_2 e_3 + \beta_3 (d_3 + e_3) + \beta_1 + \beta_2\}\ h_3^{-1}$$

Como $d_3 + e_3 + 1 = 0$ se puede escribir

$$-\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = -h_3\ \theta_{n3} + \alpha_1 d_3 + \alpha_2 e_3$$

Resumiendo las ecuaciones análogas en los nudos 4 y 5 se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_1\ \theta_{n1} \\ -h_2\ \theta_{n2} \\ -h_3\ \theta_{n3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d_1 & e_1 \\ e_2 & 0 & d_2 \\ d_3 & e_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Sistema cuya solución es:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \theta_{n1} \\ h_2 \theta_{n2} \\ h_3 \theta_{n3} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & d_1 & e_1 \\ e_2 & 0 & d_2 \\ d_3 & e_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1\theta_{n1} \\ h_2\theta_{n2} \\ h_3\theta_{n3} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_2+d_3 & e_3 & d_2 \\ d_3 & d_1+e_3 & e_1 \\ e_2 & d_1 & e_1+d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Multiplicando por el vector fila

$$(2L_2L_3, \quad 2L_3L_1, \quad 2L_1L_2)$$

se obtienen las funciones de forma, al sumarle al resultado la expresión $w_1L_1^2 + w_2L_2^2 + w_3L_3^2$. Es decir

$$N_1 = L_1^2 - (e_2+d_3)L_2L_3 - d_3L_1L_3 - L_2L_1L_2$$

$$N_4 = (L_3L_1 + L_1L_2)h_1$$

Reduciendo se obtiene: $(L_1 + L_2 + L_3 = 1)$

$$N_1 = L_1^2 - e_2L_2(1-L_2) - d_3L_3(1-L_3) = N_{w_1}$$

$$\boxed{N_4 = L_1(1-L_1)h_1 = N_{\theta_{n1}}}$$

Las matrices que relacionan deformaciones $\xi = (h_{xx}, h_{yy}, h_{xy})^T$ y los movimientos son:

$$\underline{B}_1^T = (N_{1,xx} \ ; \ N_{1,yy} \ ; \ N_{1,xy})$$

con $2A^2 \; N_{1,xx} = (a_1^2 + e_2 \; a_2^2 + d_3 \; a_3^2) = \bar{a}_1$

$$2A^2 \; N_{1,yy} = (b_1^2 + e_2 \; b_2^2 + d_3 \; b_3^2) = \bar{b}_1$$

$$2A^2 \; N_{1,xy} = (a_1b_1 + e_2 \; a_2 \; b_2 + d_3 \; a_3 \; b_3) = \bar{c}_1$$

La matriz de rígidez se calcula a partir de la fórmula:

$$\underline{k}_{ij} = \iint_A \underline{B}_i^T \; \underline{D} \; \underline{B}_j \; dxdy$$

con $\underline{D}=\begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$ matriz de elasticidad del material ortótropo de la losa.

Se obtiene por tanto:

$$k_{11}=\{\bar{a}_1^2\ D_x + 2\bar{a}_1\ b_1\ D_1 + \bar{b}_1^2\ D_y + \bar{c}_1^2\ Dxy\}\frac{1}{4A^3}$$

$$k_{12}=\{\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ D_x + (\bar{a}_1\ \bar{b}_2 + \bar{a}_2\ \bar{b}_1)D_1 + \bar{b}_1\ \bar{b}_2\ D_y + \bar{c}_1\ \bar{c}_2\ D_{xy}\}\frac{1}{4A^3}$$

$$\underline{B}_4^T=(N_{4,xx}\ ;\ N_{4,yy}\ ;\ N_{4,xy})$$

con $N_{4,xx}=-\frac{1}{2A^2}\ h_1\ a_1^2$

$$N_{4,yy}=-\frac{1}{2A^2}\ h_1\ b_1^2$$

$$N_{4,xy}=-\frac{1}{2A^2}\ h_1\ a_1\ b_1$$

Obteniéndose:

$$K_{14}=-\frac{h_1}{4A^3}\{\bar{a}_1\ a_1^2\ D_x + (\bar{a}_1\ b_1^2 + a_1^2\ \bar{b}_1)D_1 + b_1\ b_1^2\ D_y + \bar{c}_1\ a_1\ b_1\ D_{xy}\}$$

$$k_{15}=-\frac{h_2}{4A^3}\{\bar{a}_1\ a_2^2\ D_x + (\bar{a}_1\ b_2^2 + a_2^2\ \bar{b}_1)D_1 + \bar{b}_1\ b_2^2\ D_y + \bar{c}_1\ a_2\ b_2\ D_{xy}\}$$

$$K_{44}=\frac{h_1^2}{4A^3}(a_1^4\ D_x + (b_1^2\ a_1^2 + a_1^2\ b_1^2)D_1 + b_1^4\ D_y + a_1^2\ b_1^2\ D_{xy})$$

$$K_{45}=\frac{h_1h_2}{4A^3}2(a_1^2\ a_2^2\ D_x + (b_1^2\ a_2^2 + a_1^2\ b_2^2)D_1 + b_1^2\ b_2^2\ D_y + a_1\ b_1\ a_2\ b_2\ D_{xy})$$

y los demás elementos se hallan por permutación circular quedando la matriz de rígidez $\underline{K}$ de la forma siguiente:

$$\underline{K}=\frac{1}{4A^3}\begin{bmatrix} k_{ww} & k_{w\theta} \\ k_{\theta w} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$ donde:

$$
k_{ww} = \begin{bmatrix}
\begin{array}{l} \bar{a}_1^2 D_x + 2\bar{a}_1 b_1 D_1 + b_1^2 D_y \\ + \bar{e}_1^2 D_{xy} \end{array} &
\begin{array}{l} \bar{a}_1^2 \bar{a}_2^2 D_x + (\bar{a}_1 \bar{b}_2 + \bar{a}_2 \bar{b}_1) D_1 \\ + \bar{b}_1 \bar{b}_2 D_y + \bar{c}_1 \bar{c}_2 D_{xy} \end{array} &
\begin{array}{l} \bar{a}_1 \bar{a}_3 D_x + (\bar{a}_1 \bar{b}_3 + \bar{a}_3 \bar{b}_1) D_1 \\ + \bar{b}_1 \bar{b}_3 D_y + \bar{c}_1 \bar{c}_3 D_{xy} \end{array} \\
 &
\begin{array}{l} \bar{a}_2^2 D_x + 2\bar{a}_2 b_2 D_1 + \\ + \bar{b}_2^2 D_y + \bar{e}_2^2 D_{xy} \end{array} &
\begin{array}{l} \bar{a}_2 \bar{a}_3 D_x + (\bar{a}_2 \bar{b}_3 + a_3 \bar{b}_2) D_1 \\ + \bar{b}_2 \bar{b}_3 D_y + \bar{c}_2 \bar{c}_3 D_{xy} \end{array} \\
 & \textit{Simétrica} &
\begin{array}{l} \bar{a}_3^2 D_x + 2\bar{a}_3 b_3 D_1 + \\ + \bar{b}_3^2 D_y + \bar{e}_3^2 D_{xy} \end{array}
\end{bmatrix}
$$

$$
k_{w\theta} = \begin{bmatrix}
\begin{array}{l} -h_1 (\bar{a}_1 a_1^2 D_x + (\bar{a}_1 b_1^2 + a_1^2 \bar{b}_1) D_1 + \\ + \bar{b}_1 b_1^2 D_y + \bar{c}_1 a_1 b_1 D_{xy}) \end{array} &
\begin{array}{l} -h_2 (\bar{a}_1 a_2^2 D_x + (\bar{a}_1 b_2^2 + a_1^2 \bar{b}_1) D_1 \\ + \bar{b}_1 b_2^2 D_y + \bar{c}_1 a_2 b_2 D_{xy}) \end{array} &
\begin{array}{l} -h_3 (\bar{a}_1 a_3^2 D_x + (\bar{a}_1 b_3^2 + a_3^2 \bar{b}_1) D_1 \\ + \bar{b}_1 b_3^2 D_y + \bar{c}_1 a_3 b_3 D_{xy}) \end{array} \\
\begin{array}{l} -h_1 (\bar{a}_1 a_1^2 D_x + (\bar{a}_2 b_1^2 + a_1^2 \bar{b}_2) D_1 \\ + \bar{b}_2 b_1^2 D_y + \bar{c}_2 a_1 b_1 D_{xy}) \end{array} &
\begin{array}{l} -h_2 (\bar{a}_2 a_2^2 D_x + (\bar{a}_2 b_2^2 + a_2^2 \bar{b}_2^2) D_1 \\ + \bar{b}_2 b_2^2 D_y + \bar{c}_2 a_2 b_2 D_{xy} \end{array} &
\begin{array}{l} -h_3 (\bar{a}_2 a_3^2 D_x + \bar{a}_2 b_3^2 + a_3^2 \bar{b}_2) D_1 \\ + \bar{b}_2 b_3^2 D_y + \bar{c}_2 a_3 b_3 D_{xy}) \end{array} \\
\begin{array}{l} -h_1 (\bar{a}_3 a_1^2 D_x + (\bar{a}_3 b_1^2 + a_1^2 \bar{b}_3) D_1 \\ + \bar{b}_3 b_1^2 D_y + \bar{c}_3 a_1 b_1 D_{xy}) \end{array} &
\begin{array}{l} -h_2 (\bar{a}_3 a_2^2 D_x + \bar{a}_3 b_2^2 + a_2^2 \bar{b}_3) D_1 \\ + \bar{b}_3 b_2^2 D_y + \bar{c}_3 a_2 b_2 D_{xy}) \end{array} &
\begin{array}{l} -h_3 (\bar{a}_3 a_3^2 D_x + \bar{a}_3 b_3^2 + a_3^2 \bar{b}_3) D_1 \\ + \bar{b}_3 b_3^2 D_y + \bar{c}_3 a_3 b_3 D_{xy} \end{array}
\end{bmatrix}
$$

$$k_{\theta w} = k_{w\theta}^{T}$$

$$k_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} \begin{array}{l} h_1^2(a_1^4 D_x + 2a_1^2 b_1^2 D_1 + \\ + b_1^4 D_y + a_1^2 b_1^2 D_{xy}) \end{array} & \begin{array}{l} h_1 h_2 (a_1^2 a_2^2 D_x + b_1^2 a_2^2 D_1 + \\ + a_1^2 b_2^2 D_1 + b_1^2 b_2^2 D_y + \\ + a_1 b_1 a_2 b_2 D_{xy}) \end{array} & \begin{array}{l} h_1 h_3 (a_1^2 a_3^2 D_x + b_1^2 a_3^2 D_1 + \\ + a_1^2 b_3^2 D_1 + b_1^2 b_3^2 D_y + \\ + a_1 b_1 a_3 b_3 D_{xy}) \end{array} \\ & \begin{array}{l} h_2^2 a_2^4 D_x + 2h_2^2 a_2^2 b_2^2 D_1 \\ + h_2^2 b_2^4 D_y + h_2^2 a_2^2 b_2^2 D_{xy} \end{array} & \begin{array}{l} h_2 h_3 (a_2^2 a_3^2 D_x + \\ + b_2^2 a_3^2 D_1 + a_2^2 b_3^2 D_1 + \\ + b_2^2 b_3^2 D_y + a_2 b_2 a_3 b_3 D_{xy}) \end{array} \\ \text{Simétrica} & & \begin{array}{l} h_3^2 a_3^4 D_x + 2h_3^2 a_3^2 b_3^2 D_1 + \\ + h_3^2 b_3^4 D_y + h_3^2 a_3^2 b_3^2 D_{xy} \end{array} \end{bmatrix}$$

2) Las cargas equivalentes a una carga vertical uniforme en todo el elemento es:

$$P_1 = \iint_A N_1' \; q \; dxdy = \frac{1-e_2-d_3}{6} \; q \; A$$

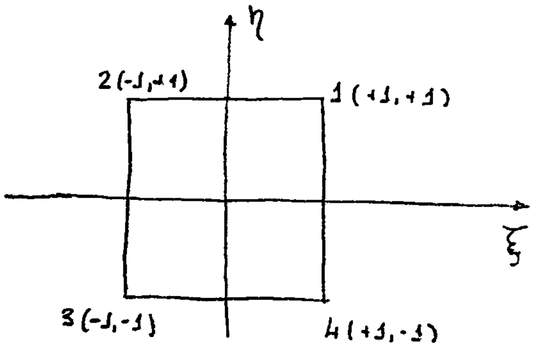
$$P_4 = \iint_A N_4' \; q \; dxdy = \frac{h_1}{6} \; q \; A$$

Se comprueba que

$$P_1+P_2+P_3 = \frac{3-(e_1+d_1 \; + \; e_2+d_2 \; + \; e_3+d_3)}{6} \; q \; A = \frac{6}{6} \; Aq \; = \; Aq$$

Ejercicio 5.5

ELEMENTO DE BOGNER



GRADOS DE LIBERTAD EN CADA NUDO

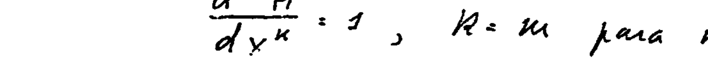
$$w, \quad \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

FUNCIONES DE FORMA

Se tomarán polinomios hermíticos de tercer grado:

> **POLINOMIOS DE HERMITE**
>
> Un polinomio hermítico
>
> $$H^{n}_{mi}(x)$$
>
> es un polinomio de grado $2n+1$, tal que
>
> para $x = x_i$
>
> $$\frac{d^k H}{dx^k} = 1, \quad k = m \text{ para } m = 0 \text{ hasta } n$$
>
> y $$\frac{d^k H}{dx^k} = 0, \quad k \neq m \text{ o cuando } x = x_j$$

Los de tercer grado son:



$$H^{(1)}_{01}(\xi) = \frac{1}{4}(2+\xi)(\xi-1)^2$$

$$H^{(1)}_{02}(\xi) = \frac{1}{4}(2-\xi)(\xi+1)^2$$

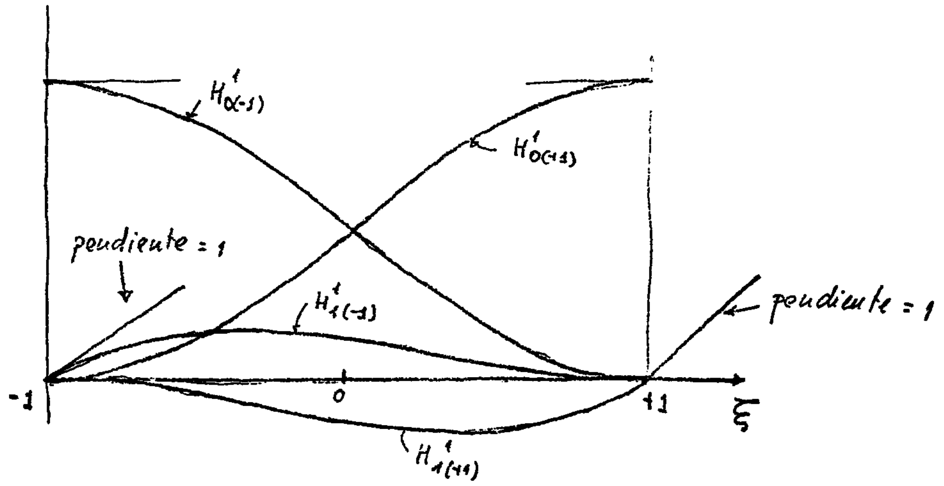
$$H^{(1)}_{11}(\xi) = \frac{1}{4}(\xi-1)(\xi^2-1)$$

$$H^{(1)}_{12}(\xi) = \frac{1}{4}(\xi+1)(\xi^2-1)$$

O bien

$H^{(1)}_{0i}(\xi) = \frac{1}{4}(2-\xi_i\xi)(\xi ...)^2$; $H^{(1)} ...$

siendo su representación gráfica la siguiente:



Se comprueba fácilmente que las funciones de forma correspondientes al nodo i son:

$$\underline{N}_i = [\, H_{0i}^{(1)}(\xi) \cdot H_{0i}^{(1)}(\eta) \,,\; H_{1i}^{(1)}(\xi)\, H_{0i}^{(1)}(\eta),$$

$$H_{0i}^{(1)}(\xi)\, H_{1i}^{(1)}(\eta),\; H_{1i}^{(1)}(\xi)\cdot H_{1i}^{(1)}(\eta)\,]$$

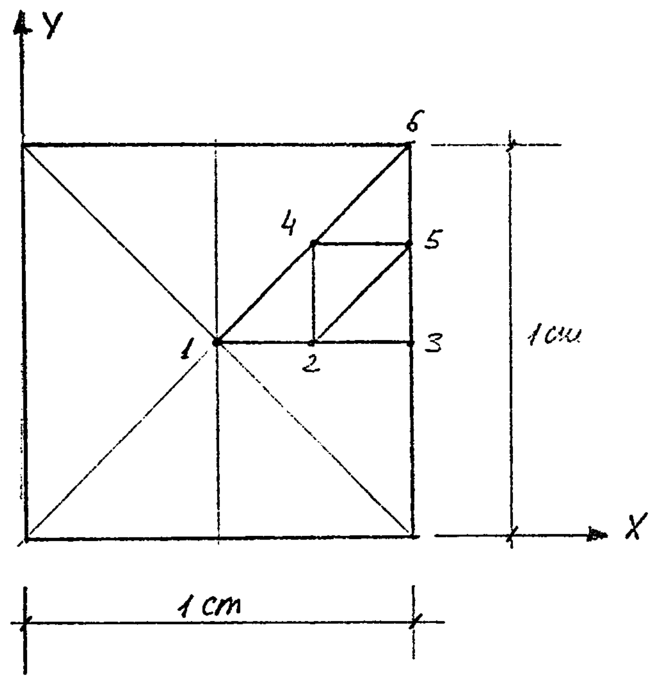
Es decir:

$$\underline{N}_i^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{16}(2-\xi_i\xi)(\xi+\xi_i)^2(2-\eta_i\eta)(\eta+\eta_i)^2 \\ \frac{1}{16}(\xi+\xi_i)(\xi^2-1)(2-\eta_i\eta)(\eta+\eta_i)^2 \\ \frac{1}{16}(2-\xi_i\xi)(\xi+\xi_i)^2(\eta+\eta_i)(\eta^2-1) \\ \frac{1}{16}(\xi+\xi_i)(\xi^2-1)(\eta+\eta_i)(\eta^2-1) \end{bmatrix}$$

que corresponden con w_i, $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i$, $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_i$

Ejercicio 6.1.

TORSION DE UN CUADRADO



Hallar:

a) Distribución de tensiones τ_{zy} y τ_{xz}

b) Momento torsor

$G = 0,8 \times 10^{7}$ Kg/cm^2

$\theta = 1°$ en 100 cm.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+C=0 \quad ; \text{ siendo } C=2G\theta$$

$$\tau_{xz}=\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad ; \quad \tau_{yz}=-\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad ; \quad M_t=2\iint\phi\,dx\,dy$$

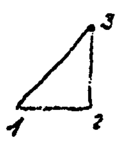
Condiciones de contorno: $\phi=0$ en los bordes

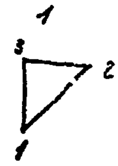
La solución de la ecuación diferencial hace mínima la funcional:

$$I=\iint_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2-C\phi\right]d\Omega=$$

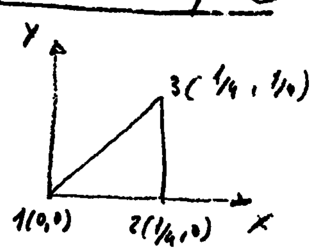
$$=\sum^{ne}\iint_{\Omega_e}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2-C\phi\right]d\Omega$$

Hay dos tipos de elementos:

Tipo ⓐ: 

Tipo ⓑ: 

Elemento tipo ⓐ



$$\phi_a=[N_1,N_2,N_3]\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix} \quad , \text{ siendo:}$$

$$\begin{cases}N_1=1-4x\\N_2=4(x-y)\\N_3=4y\end{cases}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=[N_{1,x},N_{2,x},N_{3,x}]\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=4[-1,1,0]\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2=\frac{16}{2}[\phi_1,\phi_2,\phi_3]\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}[-1,1,0]\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 = 8\ \underbrace{[\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3]}_{\underline{d}^T} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}}_{\underline{d}}$$

$$\iint_{\Omega_a} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 d\Omega = \Omega_a \times 8 \times \underline{d}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \underline{d} = \frac{1}{4}\ \underline{d}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{d}$$

Del mismo modo:

$$\iint_{\Omega_a} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 d\Omega = \frac{1}{4}\ \underline{d}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underline{d}$$

Por otra parte:

$$C\phi = C\ [\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = C\ \underline{d}^T\ \underline{N}$$

$$\iint_{\Omega_a} C\phi\ d\Omega = C \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{32}\ \underline{d}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$I_a = \frac{1}{4}\ \underline{d}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{K}_a} \underline{d} - \frac{C}{96}\ \underline{d}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{C}_a}$$

Elemento tipo (b)

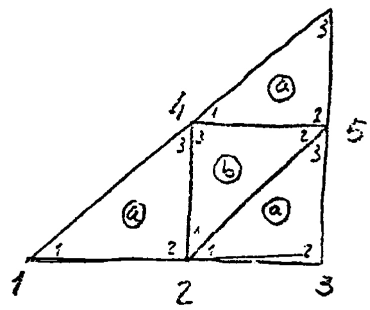
Procediendo de manera análoga, se tiene

$$I_b = \frac{1}{4}\ \underline{d}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\underline{K}_b} \underline{d} - \frac{C}{96}\ d^T \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{C}_b}$$

Ensamblando, y teniendo en cuenta que

$$\phi_3^* = \phi_5^* = \phi_6^* = 0 \qquad \text{(el asterisco (*) indica notación global}$$

se tiene



$$K_{11}^* = (K_{11})_a \quad ; \quad K_{12}^* = (K_{12})_a \quad ; \quad K_{14}^* = (K_{13})_a$$

$$K_{22}^* = (K_{22})_a + (K_{11})_a + (K_{11})_b \quad ; \quad K_{24}^* = (K_{23})_a + (K_{13})_b$$

$$K_{44}^* = (K_{33})_a + (K_{33})_b + (K_{11})_a$$

$$C_1^* = (C_1)_a \quad ; \quad C_2^* = (C_2)_a + (C_1)_a + (C_1)_b \quad ; \quad C_4^* = (C_3)_a + (C_3)_b + (C_1)_a$$

luego:

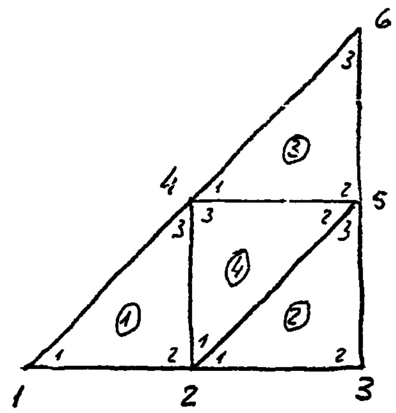
$$I = \sum^{ne} I_e = \frac{1}{4} \underline{d}^{*T} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \underline{d}^* - \frac{c}{96} \underline{d}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

é imponiendo la condición de I mínimo

$$\frac{\partial I}{\partial \underline{d}^*} = 0 \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \\ \phi_4^* \end{bmatrix} = \frac{c}{96} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Con lo cual:

$$\begin{bmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \\ \phi_4^* \end{bmatrix} = \frac{c}{384} \begin{bmatrix} 30 \\ 22 \\ 17 \end{bmatrix}$$



a) DISTRIBUCION DE TENSIONES

ELEMENTO 1 :

$$\phi_1 = \phi_1^* = \frac{30C}{384} \quad ; \quad \phi_2 = \phi_2^* = \frac{22C}{384} \quad ; \quad \phi_3 = \phi_4^* = \frac{17C}{384} ,$$

luego

$$\phi^1 = \frac{C}{384}\left[\, 1-4x \,,\; 4(x-y) \,,\; 4y \,\right] \begin{bmatrix} 30 \\ 22 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\left(\tau_{xz}\right)_1 = \frac{\partial \phi^1}{\partial y} = \frac{C}{384}\left[\, 0 \,,\; -4 \,,\; 4 \,\right] \begin{bmatrix} 30 \\ 22 \\ 17 \end{bmatrix} = \frac{C}{384}\left[-88+68\right] :$$

$$\boxed{\left(\tau_{xz}\right)_1 = -\frac{20C}{384}}$$

$$\left(\tau_{yz}\right)_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{C}{384}\left[\, -4 \,,\; 4 \,,\; 0 \,\right] \begin{bmatrix} 30 \\ 22 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\left(\tau_{yz}\right)_1 = +\frac{32C}{384}}$$

ELEMENTO 2

$$\phi_1 = \phi_2^* \quad ; \quad \phi_2 = \phi_3^* = 0 \quad ; \quad \phi_3 = \phi_5^* = 0$$

$$\phi^2 = \frac{C}{384}\left[\, 1-4x \,,\; 4(x-y) \,,\; 4y \,\right] \begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\tau_{xz}\right)_2 &= 0 \\ \left(\tau_{yz}\right)_2 &= \frac{88C}{384} \end{aligned}}$$

ELEMENTO 3

$$\phi_1 = \phi_1^* \quad ; \quad \phi_2 = \phi_5^* \quad ; \quad \phi_3 = \phi_6^* = 0$$

$$\phi^3 = [\,1-4x \;,\; 4(x-y) \;,\; 4y\,] \begin{bmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\tau_{xz})_3 = 0 \\ (\tau_{yz})_3 = \dfrac{68c}{384} \end{array}}$$

ELEMENTO 4

$$\phi_1 = \phi_2^* \quad ; \quad \phi_2 = \phi_5^* \quad ; \quad \phi_3 = \phi_4^*$$

$$\phi^4 = \frac{c}{384} [\,1-4y \;,\; 4x \;,\; 4(y-x)\,] \begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\tau_{xz})_4 = -\dfrac{20c}{384} \\ (\tau_{yz})_4 = \dfrac{68c}{384} \end{array}}$$

Hay discontinuidad en los nudos 1, 2 y 4

b) <u>MOMENTO TORSOR</u>

$$M_t = 2\iint_{\Omega} \phi \, d\Omega = 2\sum^{ne} \iint_{\Omega_e} [N_1 \,, N_2 \,, N_3]_e \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}_e d\Omega =$$

$$= 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{32} \sum^{ne} (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)_e = \frac{1}{48} (\phi_1^* + 3\phi_2^* + 3\phi_4^*)$$

Para toda la sección

$$M_t = 8 \times \frac{1}{48} \times \frac{c}{384} (30 + 3 \times 22 + 3 \times 17) =$$

$$\boxed{M_t = \frac{49}{2} \times \frac{c}{384}}$$

Ejercicio 7.1

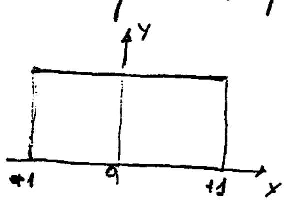
Obtener las posiciones de los puntos de Gauss y sus respectivos pesos para realizar la integración numérica por el método de Gauss con 1, 2 y 3 puntos.

Las posiciones de los n puntos de integración se toman simétricas respecto al origen, pudiéndose con ellos integrar exactamente polinomios de de grado $2n-1$, ya que se dispone de $2n$ parámetros: n puntos y n pesos.

Si se considera el mismo peso para un punto y su simétrico automáticamente se obtiene la integral exacta de los monomios de grado impar, que es cero.

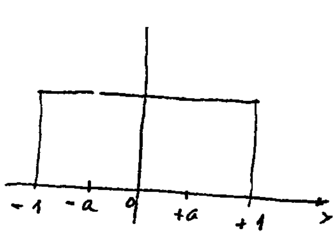
1 punto de Gauss

Se toma como punto el origen, con lo que se integran exactamente los monomios de grado impar; $\boxed{a = 0}$

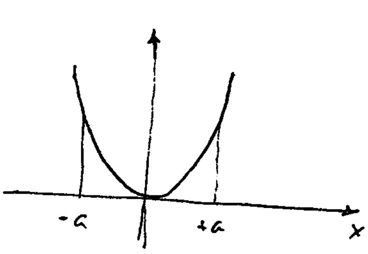


Función	Integral exacta	Cuadratura de Gauss
$y = 1$	2	$W_0 \cdot 1 = 2 \Rightarrow \boxed{W_0 = 2}$

2 puntos de Gauss

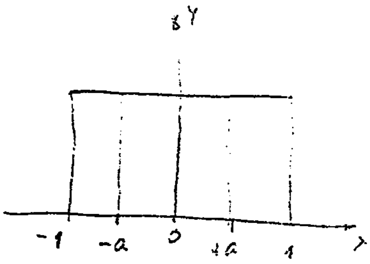
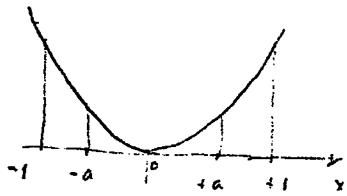
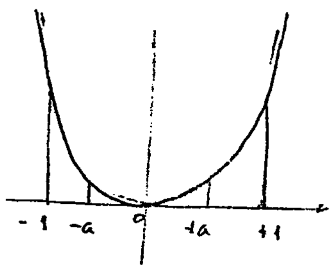


Función	Integral exacta	Cuadratura de Gauss
$y = 1$	2	$W_a + W_a = 2 \Rightarrow \boxed{W_a = 1}$



$y = x^2$	$\frac{2}{3}$	$1 \cdot a^2 + 1 \cdot a^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}}$

3 puntos de Gauss

Función	Integral exacta	Cuadratura de Gauss
 $f=1$	2	$w_0 \times 1 + w_a \cdot 1 + w_a \cdot 1 = 2$
 $f=x^2$	$\frac{2}{3}$	$w_0 \times 0 + w_a \cdot a^2 + w_a \cdot a^2 = \frac{2}{3}$
 $f=x^4$	$\frac{2}{5}$	$w_0 \times 0 + w_a \cdot a^4 + w_a a^4 = \frac{2}{5}$

Es decir:

$$\left.\begin{aligned} w_0 + 2w_a &= 2 \\ w_a \cdot a^2 &= \frac{1}{3} \\ w_a \cdot a^4 &= \frac{1}{5} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{a = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}} \quad \boxed{w_a = \frac{5}{9}} \quad \boxed{w_0 = \frac{8}{9}}$$

Ejercicio E4.1.

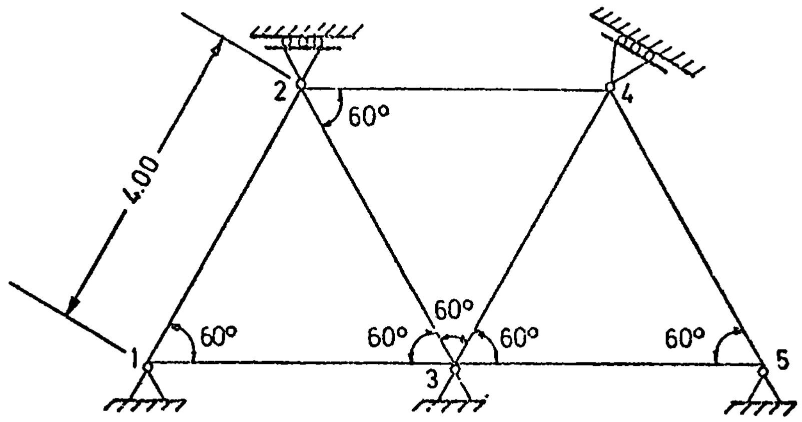


Fig. E 4. 1 a

En la celosía plana de la figura E4.1a., todas las barras son de sección constante A=20 cm^2 y módulo de elasticidad E= $2,1\times10^6$.kg.cm^{-2}

La barra 2-3 sufre un incremento de longitud de 3 cm producido por la temperatura.

Se pide:

1).- Matriz de rigidez de la estructura.

2).- Movimientos de todos los nudos.

3).- Esfuerzos en todas las barras.

4).- Reacciones en los apoyos.

El apoyo del nudo 4 no es corcondante con los ejes generales (x',y') de la figura E4.1b. Se podría utilizar la técnica, de considerar ejes de nudo. No obstante aquí, se ha procedido a introducir una barra ficticia de rígidez a esfuerzo axil K muy grande y nula a flexión.

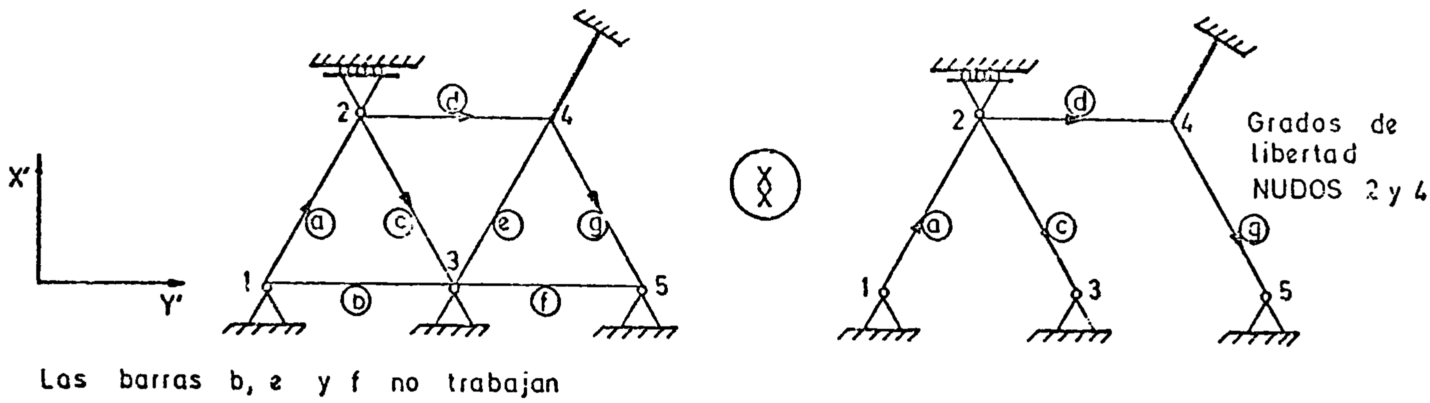


Fig. E4.1b

Teniendo en cuenta la figura E4.1b. se tiene:

$$\underline{K}'=\begin{bmatrix}(K'_{22})_a+(K'_{11})_c+(K'_{11})_d & (K'_{12})_d \\ (K'_{21})_d & K'+(K'_{22})_d+(K'_{11})_g\end{bmatrix}$$

El cambio de ejes generales a particulares es (figura E4.1c.):

$$Px'=Px\ \cos\alpha \qquad ; \begin{bmatrix}Px'\\Py'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha\end{bmatrix} Px \rightarrow T=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha\end{bmatrix}$$
$$Py'=Px\ \operatorname{sen}\alpha$$

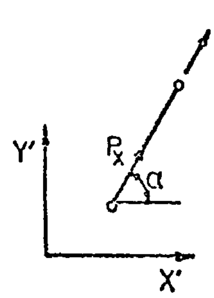


Fig. E4.1c

Las matrices de rígidez de cada elemento son:

$$(K_{22})_a=\frac{EA}{L};\quad (K'_{22})_a=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha\end{bmatrix}\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\end{bmatrix}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha\end{bmatrix}$$

$$(K_{22})_a=\frac{EA}{L};\quad \alpha=60°;\quad (K'_{22})_a=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$(K_{11})_d=\frac{EA}{L};\quad \alpha=0°;\quad (K'_{11})_d=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$(K_{11})_c=\frac{EA}{L};\quad \alpha=120°;\ (K'_{11})_c=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\sqrt{3}/4\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 3/4\end{bmatrix}$$

$$(K_{12})_d=\frac{-EA}{L};\quad \alpha=0°;\quad (K'_{12})_d=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$(K_{21})_d=\frac{-EA}{L};\quad \alpha=0°;\quad (K'_{21})_d=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$(K_{22})_d=\frac{EA}{L};\quad \alpha=0°;\quad (K'_{22})_d=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$(K_{11})_g=\frac{EA}{L};\quad \alpha=120°;\ (K'_{11})_g=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1/4 & -\sqrt{3}/4\\ -\sqrt{3}/4 & 3/4\end{bmatrix}$$

$$K = K;\quad \alpha=60°;\quad K' = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}K.1/4 & K.\sqrt{3}/4\\ K.\sqrt{3}/4 & K.3/4\end{bmatrix}$$

La matriz de rígidez total es:

$$\underline{K'}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}3/2 & 0 & - & -\\ 0 & 3/2 & - & -\\ -1 & 0 & - & -\\ 0 & 0 & - & -\end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que el apoyo 2 no puede tener desplazamiento vertical ($d'y_2=0$) se tiene:

$$\begin{bmatrix} P'_{x2} \\ P'_{y2} \\ P'_{x4} \\ P'_{y4} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}+K & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{K+5}{4} & \sqrt{\frac{3}{4}}(K-1) \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{4}}(K-1) & \sqrt{\frac{3}{4}}(K+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{x2} \\ d'_{y2} \\ d'_{x4} \\ d'_{y4} \end{bmatrix}$$

La fila y columna recuadradas se pueden no tener en cuenta en principio.

Siendo $\Delta_{2-3}=$ 3 cm. de alargamiento

$$F= \frac{EA}{L} \cdot \Delta_{2-3}= \frac{EA}{L} \cdot 3$$

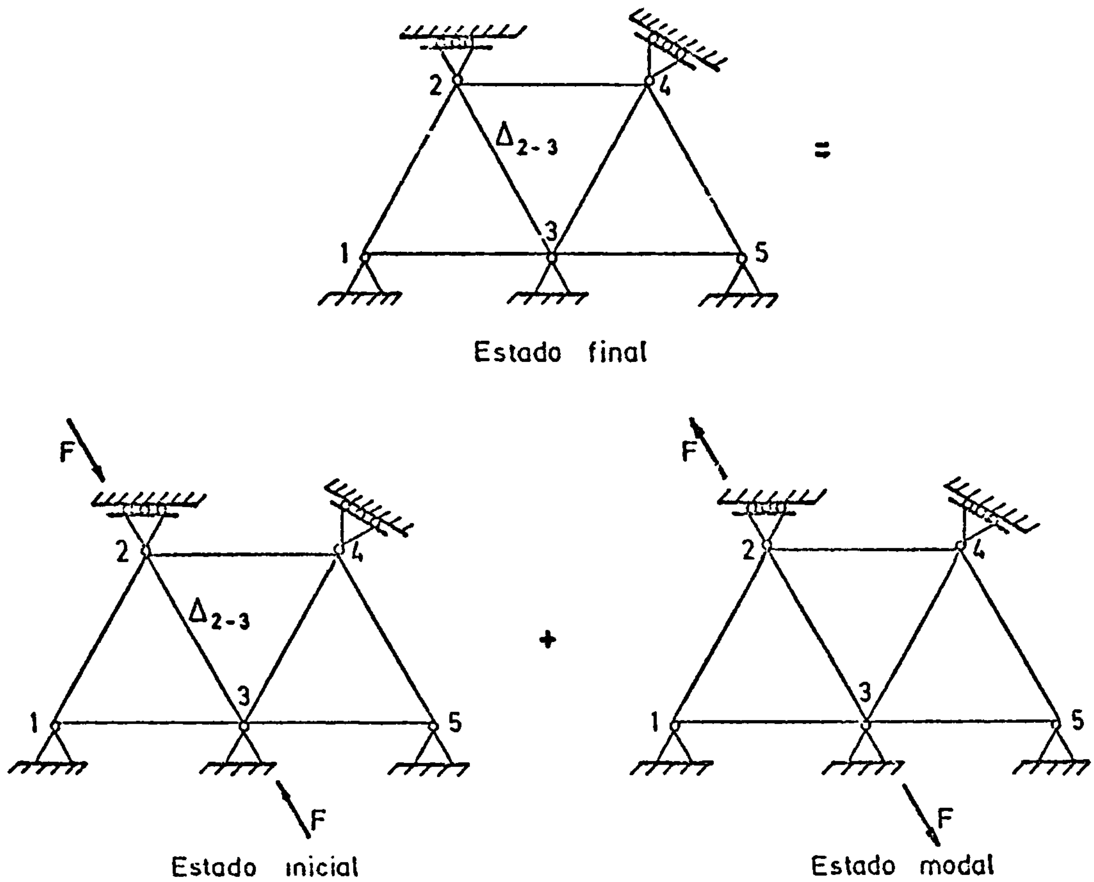


Fig. E4 1d

Para la resolución del problema el estado real o final se descompone en los estados indicados en la figura E4.1d.

En la solución modal se tiene:

$$P'_{x2}=-\frac{3}{2}\ \frac{EA}{L}$$

$$P'_{y2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\ \frac{EA}{L}$$

de donde se deduce:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}3/2 & -1 & 0\\ -1 & \frac{K+5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}(K-1)\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4}(K-1) & \frac{3}{4}(K+1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d'_{x2}\\ d'_{x4}\\ d'_{y4}\end{bmatrix}$$

invirtiendo queda:

$$|\Delta|=\frac{3}{8}(4K+1)$$

$$\begin{bmatrix}d'_{x2}\\ d'_{x4}\\ d'_{y4}\end{bmatrix}=\frac{8}{3(4K+1)}\begin{bmatrix}\frac{3}{4}(2K+1) & \frac{3}{4}(K-1) & \frac{-\sqrt{3}}{4}(K-1)\\ \frac{3}{4}(K+1) & \frac{9}{8}(K+1) & \frac{-3\sqrt{3}}{8}(K-1)\\ \frac{-\sqrt{3}}{4}(K-1) & \frac{-3\sqrt{3}}{8}(K-1) & \frac{3K+7}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3/2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}d'_{x2}\\ d'_{x4}\\ d'_{y4}\end{bmatrix}=\frac{8}{3(4K+1)}\begin{bmatrix}-\frac{9}{8}(2K+1)\\ -\frac{9}{8}(K+1)\\ \frac{3\sqrt{3}}{8}(K-1)\end{bmatrix}\qquad \left\{\begin{array}{l}d'_{x2}=-3\,\frac{2K+1}{4K+1}\\ d'_{x4}=-3\,\frac{K+1}{4K+1}\\ d'_{y4}=\sqrt{3}\ \frac{K-1}{4K+1}\end{array}\right.\ \text{cuando}\,K\to\infty\ \left\{\begin{array}{l}d'_{x2}=-\frac{3}{2}\\ d'_{x4}=-\frac{3}{4}\\ d'_{y4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\end{array}\right.$$

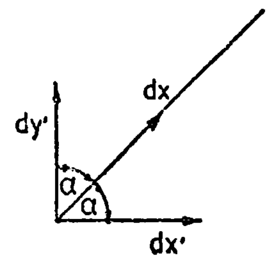
2).- MOVIMIENTOS DE LOS NUDOS:

$d'_{x2}=-1.5$ cm.	$d'_{x4}=-0.75$ cm.
$d'_{y2}=0$	$d'_{y4}=0.433$ cm.

3).- <u>ESFUERZOS EN LAS BARRAS:</u> Solución final= Solución inicial + Solución modal.

Hay que recordar que la solución inicial solo va a afectar a la barra 2-3.

$d_x = d'_x \cos\alpha + d'_y \operatorname{sen}\alpha;$ $\qquad d = \{\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha\}\begin{bmatrix} dx' \\ dy' \end{bmatrix} = \underline{T}^T \cdot \underline{d}'$



<u>Barra a</u>: $P_{2a} = (K_{22})_a \cdot d_{2a} = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-3EA}{4L} = -\frac{3.2,1.10^3.20}{4.400}$ ton=

=78,75 ton.

<u>Barra c</u>: $(P_{1c}) = (K_{11})_c \cdot d_{1c} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-3EA}{4L} = -78{,}75$ ton.

Por la solución inicial: $\frac{3EA}{L} = 315$ ton.

<u>Barra d</u>: $P_{1d} = (K_{11})_d \cdot d_{1d} + (K_{12})_d \cdot d_{2d} = \frac{EA}{L}\ \{1,0\}\begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{EA}{L}\{1\ \ 0\}\begin{bmatrix} -3/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix} =$

$= -78{,}75$ ton.

<u>Barra g</u>: $P_{1g} = (K_{11})_g \cdot d_{1g} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix} = -\frac{3EA}{4L} = -78{,}75$ ton.

Fijándose en los <u>ejes locales</u> de barra y llamando:

$\left.\begin{array}{l} \text{Tracción (+)} \\ \text{Compresión (-)} \end{array}\right\}$, a la tracción positiva y a compresión negativa se puede hacer la tabla E4.1a.

BARRA	SOLUCION INICIAL	SOLUCION MODAL	ESFUERZO
1-2	0	-78,75	-78,75
1-3	0	0	0
2-3	-315	+78,75	-236.25
2-4	0	+78,75	+78,75
3-4	0	0	0
3-5	0	0	0
4-5	0	+78,75	+78,75

Tabla E4.1a.

A) <u>Cálculo de las reacciones</u> (en toneladas).

En los ejes generales (x',y'): $\underline{R}_i$= reacción en nudo i en ejes generales.

$$\underline{R}_1 = \underline{p}'_{1a} = \underline{T}_a \cdot (\underline{K}_{12})a \cdot \underline{T}^t_a \cdot \underline{d}'_2 = -\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1,5.10^{-2} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$=1,05.10^4\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}.1,5.10^{-2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}.1,5.10^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,375 \\ 68,2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_2^{S.Modal} = \underline{p}'_{2a} + \underline{p}'_{1c} + \underline{p}'_{1d} = (K'_{22})_a\ \underline{d}'_2 + (K'_{11})_c\ \underline{d}'_2 + (K'_{11})_d\ \underline{d}'_2 + (K'_{12})_d \cdot \underline{d}'_4 =$$

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\underline{d}'_2 - \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\underline{d}'_4 = 1,05.10^2\begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-1,05.10^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0,75 \\ 0,433 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta, además, la solución inicial:

$$\underline{R}_2 = \underset{S.inicial}{315\begin{bmatrix} 1/2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}} + \underset{S.modal}{105\begin{bmatrix} -2,25+0,75 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -272,8 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_3 = 315\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \overset{S.modal}{+\underline{p}'_{2c}} = 315\begin{bmatrix} -1/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} + K'_{21})_c \cdot \underline{d}'_2 = 315\begin{bmatrix} -1/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} -$$

$$-105\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\sqrt{3}/4 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1,5 \\ 0 \end{bmatrix} = 315\begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} - 105\begin{bmatrix} -0,375 \\ +0,6495 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -118,125 \\ 204,6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_4=\underline{P}'_{2d}+\underline{P}'_{1g}=(K'_{21})_d\cdot\underline{d}'_2+\{(K'_{22})_d+(K'_{11})_g\}d'_4=$$

$$+105\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1,5\\ 0\end{bmatrix}+105\begin{bmatrix}1,25 & -\sqrt{3}/4\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0,75\\ 0,433\end{bmatrix}=105\begin{bmatrix}0,375\\ 0,6495\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}39,375\\ 68,1975\end{bmatrix}$$

La ventaja de operar con ejes de nudo estriba en que, en el apoyo 4 (no concordante), la reacción ya se obtiene en dichos ejes y no en los generales tal como sucede aquí.

$$\underline{R}_5=\underline{P}'_{2g}=(K'_{21})_g\cdot\underline{d}'_4=-105\begin{bmatrix}1/4 & -\sqrt{3}/4\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 3/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0,75\\ 0,433\end{bmatrix}=-105\begin{bmatrix}-0,375\\ 0,6495\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}39.375\\ -68.1975\end{bmatrix}$$

Como comprobación se puede realizar el cálculo de la figura E4.1e.

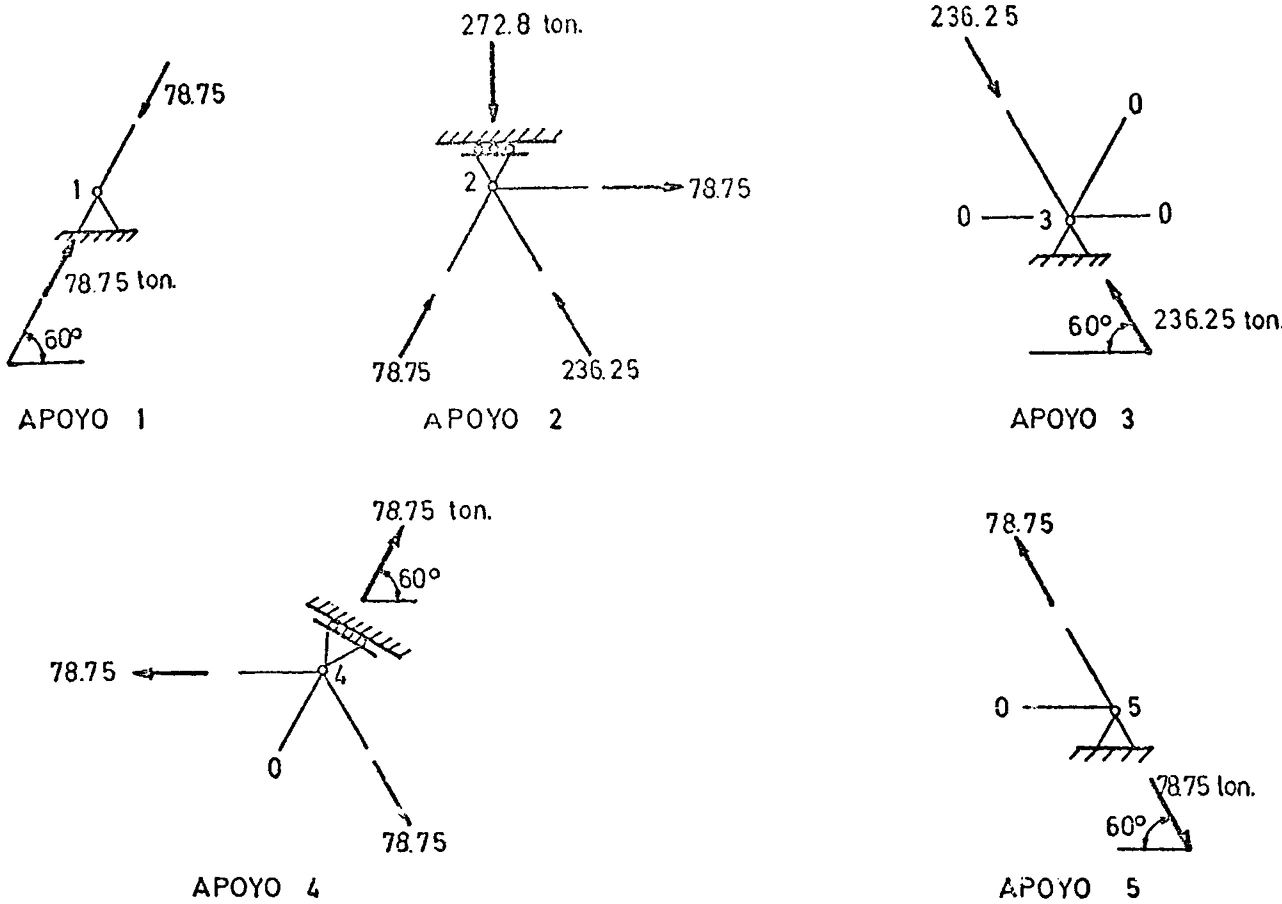


Fig E4.1e

El resultado final se representa en la figura E4.1f.

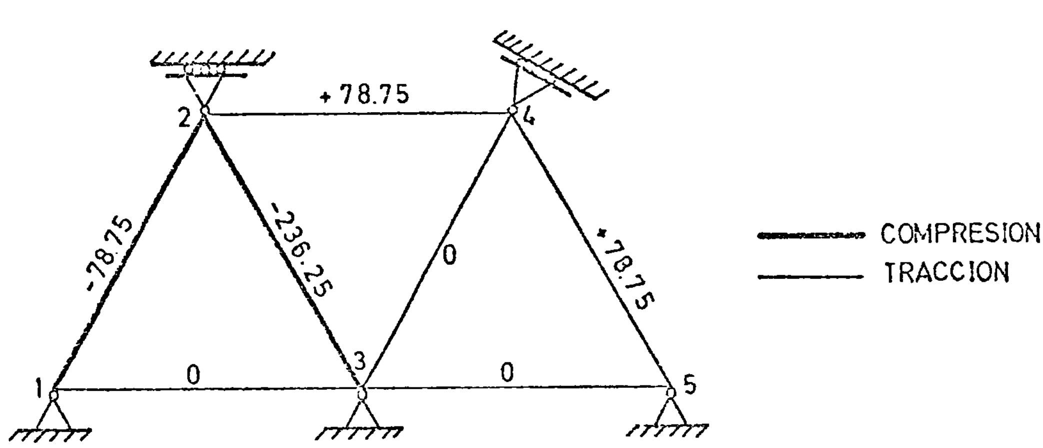


Fig. E4.1f